Федеральное агентство по науке и инновациям
Российская академия наук
Сибирское отделение
Институт автоматики и электрометрии
Федеральное агентство по образованию
Новосибирский государственный университет

Л. В. Ильичёв

ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕТАФИЗИКИ

Часть I
(квантовая нелокальность, неравенства Белла
и парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена)

Учебное пособие

Новосибирск
2006

УДК 539.1.01
ББК (В)22,314
И

Ильичёв Л. В. **Элементы квантовой метафизики. Ч.1: Квантовая нелокальность, неравенства Белла и парадокс Эйнштейна– Подольского–Розена. 63 с. Учебное пособие / Новосибирский государственный университет; Институт автоматики и электрометрии СО РАН. Новосибирск, 2006**

В настоящем учебном пособии представлен материал, основанный на курсе лекций, читаемых автором в Новосибирском государственном университете. Изложен современный взгляд на некоторые актуальные интерпретационные проблемы квантовой теории, слабо отражённые в отечественной литературе.

Пособие рассчитано на студентов и аспирантов, обучающихся по специальностям, связанным с квантовой физикой. Оно может быть полезным и для молодых специалистов, работающих в этой области.

Подготовлено при поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (государственный контракт № 02.438.117034 от 06.03.2006, выполняемый в рамках федеральной целевой научно-технической программы "Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники" на 2002-2006 гг.)

©Институт автоматики и электрометрии СО РАН, 2006
©Новосибирский государственный университет, 2006

Оглавление

Введение

Математика и физика удостоились обладания собственными философиями – метаматематикой и метафизикой. И предмет и метод "метанаук" менялся со временем, отслеживая процессы в основных науках. Периоды кризисов в развитии математики и физики есть одновременно взлёт и золотое время метанаук, которые при этом жертвуют частью своих результатов в пользу основных наук.

Этот процесс ярко проявляется в истории метаматематики, когда борьба с парадоксами "наивной" теории множеств привела в конечном счёте к появлению изощрённых структур математической логики, чьим предметом являются сами процессы математических рассуждений и доказательств, понятия истинности и существования, т. е. наиболее фундаментальные элементы "математической реальности".

Нечто сходное имеет место и в метафизике, точнее в *квантовой метафизике*. Данное уточнение призвано ослабить негативную репутацию самого термина "метафизика", воспринимаемого многими как синоним туманных рассуждений и как реликт донаучной эпохи. Предметом квантовой метафизики является модификация нашего взгляда на природу физической Реальности и её отношение к Сознанию в свете открытий квантовой физики. К квантовой метафизике относятся по-существу знаменитые вопросы интерпретации, поднимаемые в дискуссиях А. Эйнштейна, Н. Бора, В. Гейзенберга и других создателей квантовой механики.

Пожалуй, можно говорить о разделении квантовой физики и квантовой метафизики после Сольвеевского конгресса осени 1927 г. На этом конгрессе констатировалось создание матричной и волновой механик как действенных рабочих инструментов новой науки. А ранее был необычайно увлекательный и порой мучительный поиск нового квантового языка, системы понятий и самого способа квантового мышления. Свидетелями того были старинные улицы Геттингена и Копенгагена, туристские тропы близ озера Вальхензее, дюны и сосновые леса Гельголанда. Предметом споров и одиноких размышлений была природа Реальности. Надо было понять, насколько реальны боровские орбиты в атоме в сравнении, например, со следом электрона в камере Вильсона. Само собой получилось, что в центре внимания оказалось то, что впоследствии получило своё математическое оформление как некоммутативность квантово-механических наблюдаемых. Именно проблема некоммутативности, представленная через соотношение неопределённостей, составляла предмет дискуссий Бора и Эйнштейна. Возникла боровская концепция дополнительности, распространённая на множество понятий за пределами квантовой механики (в частности, Бор и Гейзенберг считали дополнительными категории любви и справедливости).

В итоге была выработана так называемая Копенгагенская интерпретация квантовой механики, отражаемая более или менее удачно во многих традиционных учебниках. По крайней мере она позволила перевести дух и как-то обосноваться на новой территории. В мемуарах [1] Гейзенберг (фото на рис. 1) передаёт ощущение необыкновенной радости и облегчения, когда ворота в квантовый мир оказались широко распахнуты и "огромные трудности, поглощавшие в предшествующие годы все наши силы, оказались преодолены". Буквально под ногами лежали бесчисленные интересные задачи, и в руках уже были инструменты для их решения. Чего бóльшего может желать физик? Споры и проблемы интерпретации естественным образом отошли на второй план даже у корифеев. Правда, Эйнштейн уже под занавес фило-

Рис. 1: Вернер Гейзенберг

софских битв соединил первую букву своей фамилии с аббревиатурой ныне знаменитого парадокса ЭПР (о нём подробно пойдёт речь ниже). Открытие деления ядра урана и приближающаяся война ещё больше сменили приоритеты. Пришлось заниматься атомным проектом, не задаваясь вопросами интерпретации волновой функции[1].

Старшее поколение создателей квантовой физики сохранило глубокий философский подход к проблеме физической реальности. Этому в немалой степени способствовало полученное ими в юности классическое образование. Гейзенбер-

[1]В нашей стране дополнительно проявляли себя определённые идеологические факторы, делавшие небезопасным обращение к философским проблемам. Приметой той эпохи, возможно, является феноменальная лаконичность обсуждения интерпретации в "Квантовой механике" Ландау и Лифшица.

гу удавалось рассуждать о ней даже на разрушенной Потсдаммерштрассе, а Реальность вторгалась в его размышления в виде время от времени загорающегося ботинка, которым Гейзенберг угодил в лужу фосфора от британской авиабомбы. Гейзенбергу принадлежит удивительное предвидение, что очередное научное завоевание в постижении природы Реальности окажется обязанным новому способу образования понятий на расплывчатых границах физики с математикой, теорией информации и философией. Нынешний ренессанс квантовой метафизики целиком подходит под эти признаки.

Рис. 2: Джон Стюарт Белл

В "Принципах квантовой механики" Поль Дирак высказал соображение, что самым таинственным и глубоким в квантовой теории является понятие суперпозиции состояний. Он ставил его даже выше соотношения неопределённостей. Центральный объект нынешней квантовой метафизики есть суперпозиционное состояние составной квантовой системы – так называемое зацепленное состояние. Оно фигурирует в парадоксе ЭПР и в той необычайно глубокой идее Джона Стюарта Белла (фото на рис. 2), которая и послужила толчком к новому рассмотрению основ квантовой механики. Можно сказать, что нынешним взлётом квантовая метафизика обязана трём знаменитым работам – уже упоминавшейся статье о парадоксе ЭПР [2], статье Белла [3] и работе Хью Эверетта III [4], известной многим как "многомировая" интерпретация квантовой механики. В трудах последователей сформировалось новое физическое направление – квантовая теория информации. В определённой степени можно говорить о появлении информационной парадигмы в физике по примеру уже известной геометрической парадигмы, толчком к которой в своё время послужили идеи из общей теории относительности и физики калибровочных полей. Практическим приложением квантовой теории информации могут оказаться квантовые вычисления. Перспективы в этом направлении должны проясниться в ближайшие годы.

Гораздо более важным фактом может оказаться появления нового способа мышления, влияние которого на развитие человечества ещё нельзя предугадать. Поднятые вопросы касаются самых глубоких проблем отношения Реальности и Сознания. Возможно, в прошлом останутся попытки построения картины "пустого" Мира и принципиальным элементом будущей теории окажется присутствие познающего субъекта. А предпосылки к новому способу мышления закладывались ещё весной 1919 г., когда юный Вернер Гейзенберг – в ту пору вестовой штаба Второго командования кавалерийских стрелков – оказался поглощён платоновским "Тимеем". Он читал его в оригинале (!) на крыше здания мюнхенской семинарии, где расквартировался штаб, а в предместьях ещё гремели выстрелы. Там добровольческие отряды в боях с местными баварскими Советами добывали для Гейзенберга и для ещё не родившейся квантовой механики двенадцать лет не очень сытого, но относительно спокойного будущего.

1 Принцип локальной причинности

Рассмотрим некоторые общие свойства окружающего мира, по-возможности абстрагируясь от конкретной физической теории, т. е. оперируя в каком-то смысле методами метанауки. В частности, можно пока не вспоминать о квантовой механике (КМ), хотя мы будем порой использовать её терминологию.

На нашем начальном этапе удобно рассматривать Мир как своего рода "чёрный ящик", конкретное устройство которого нам не известно. На вход этого ящика подаются разнообразные "вопросы", т. е. целенаправленно ставятся эксперименты по измерению физических величин – наблюдаемых. Мы будем обозначать "вопросы" греческими буквами α, β и т. д. На выходе мы получаем ответ – численное значение измеряемой наблюдаемой, обозначаемые далее латинскими буквами a, b и т. д. Эмпирическим фактом является та или иная степень случайности связи "вопроса" и "ответа". По этой причине естественным математическим объектом, с которым мы будем работать, является вероятность

$$p(a|\alpha) \tag{1}$$

получения "ответа" a при условии постановки вопроса α. Будем считать, что множество $\{a\}$ возможных значений, принимаемых наблюдаемой, *a priori* известно. Более тонким понятием оказывается содержание "вопроса" α. Например, символ "α" может быть представителем вопроса "Какова проекция спина электрона вдоль направления на Полярную звезду?" Ясно, что такой вопрос подразумевает (хотя бы в принципе) организацию эксперимента типа опыта Штерна–Герлаха. Заметим, однако, что в самом вопросе отсутствует какая-либо информация о предшествующей судьбе электрона, над которым мы собираемся ставить эксперимент, а от этого наверняка может зависеть вероятность того или иного результата измерения. С этим согласится любой физик. Более того, нельзя отбрасывать гипотетическое влияние на исход эксперимента необозримого многообразия иных факторов, например истории деталей, из которых построена экспериментальная установка, биографии экспериментаторов, их родственников и т. д. Ведь мы рассматриваем окружающий мир как целостность и *a priori* не вправе по своему усмотрению и предпочтению объявить несущественной ту или иную совокупность факторов.

Есть, однако, один важный принцип, которым мы будем руководствоваться, ограничивая список условий, влияющих на вероятность исхода a. Назовём этот принцип *запретом на сверхсветовую связь*. Он пришёл из специальной теории относительности и является одним из основных элементов нашего сегодняшнего миропонимания. В англоязычной литературе принято обозначать этот принцип аббревиатурой **NS** (Non-Signalling). Согласно этому принципу *никакой сигнал и соответственно никакая информация не могут прийти в пространственно-временную точку из внешности её светового конуса прошлого.*

Далее мы будем постоянно иметь дело с двумя персонажами, населяющими значительную часть литературы по современной квантовой метафизике. Это экспериментаторы Алиса (Alice) и Боб (Bob). Их вводят вместо сухих символов A и B. Алиса и Боб задают вопросы окружающему миру (ставят соответствующие эксперименты), находясь во взаимно причинно-несвязанных областях пространства-времени. Эта ситуация отражена на рис. 3. Каждый из двух экспериментов (события A и B) проводится в пространственно-временной области (для простоты мы сводим эти области к точ-

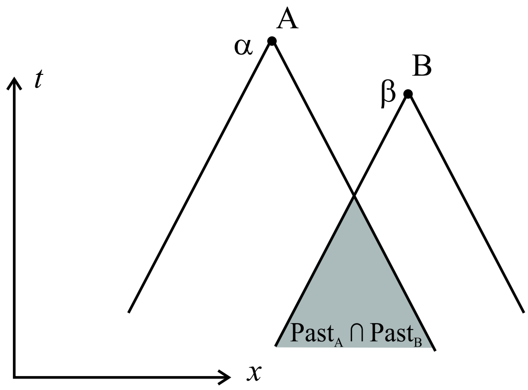

Рис. 3: Схема экспериментов Алисы и Боба в пространстве-времени Минковского.

кам), лежащей вне светового конуса прошлого другого эксперимента. Согласно принципу **NS** никакой выбор вопроса β Бобом не может служить способом отправки сообщения в точку пространства-времени, где проводится эксперимент Алисы, и наоборот. Этот запрет на языке *совместного распределения вероятностей* $p(a,b|\alpha,\beta)$ исходов экспериментов Алисы и Боба отражается в соотношениях

$$\sum_b p(a,b|\alpha,\beta) = p(a|\alpha);$$
$$\sum_a p(a,b|\alpha,\beta) = p(b|\beta). \tag{2}$$

Здесь в правой части первой строки из списка условий исчезает β – для Алисы вероятность получить тот или иной исход её эксперимента не может зависеть от *акта свободной воли* Боба выбрать тот или иной тип проводимого им эксперимента, если этот выбор осуществляется вне причинного прошлого $Past_A$ эксперимента Алисы. Аналогичен смысл

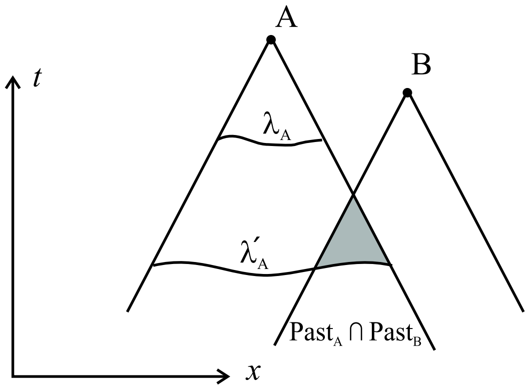

Рис. 4: В $Past_A$ выделены две гиперповерхности, на которых заданы условия λ_A и λ'_A.

второй строки в (2)[2]. Можно сами соотношения (2) положить в основу определения принципа **NS**.

Мы видим, что для прояснения проблемы со списком условий в распределении вероятностней (1) оказалось полезным рассматривать совместное распределение $p(a, b|\alpha, \beta)$. Далее мы будем рассматривать случай

$$p(a, b|\alpha, \beta) \neq p(a|\alpha)\, p(b|\beta),$$

отвечающий наличию корреляций исходов экспериментов Алисы и Боба. Физическая интуиция говорит нам, что корреляции должны иметь некоторую причину, находящуюся в совместном прошлом $Past_A \cap Past_B$ событий A и B. (эта область на рис. 3 заштрихована). Рассмотрим рис. 4. Он фактически повторяет схему рис. 3, но теперь внутри области

[2]Для краткости мы не снабжаем вероятности $p(a|\alpha)$ и $p(b|\beta)$ в (2) дополнительными различающими их индексами. Читателю наверняка ясно, что это в общем случае разные функции своих аргументов.

$Past_A$ мы выделили две пространственно-подобные гиперповерхности, на которых предполагаются заданными условия λ_A и λ'_A. В частном случае роль этих гиперповерхностей могут играть множества одновременных событий относительно некоторой инерциальной системы отсчёта. Заметим, что есть подобласть в $Past_A \cap Past_B$, лежащая в будущем по отношению к части гиперповерхности с λ'_A, тогда как гиперповерхность с условием λ_A полностью "экранирует" событие A от $Past_A \cap Past_B$. Пусть мы решили использовать λ'_A как дополнительное условие в распределении вероятностей исхода эксперимента Алисы, т. е. рассмотрим $p(a|\alpha;\lambda'_A)$. В λ'_A, несомненно, может оказаться отраженной часть условий из $Past_A \cap Past_B$, приводящих к корреляции между a и b, однако события в заштрихованной области также могут быть причиной таких корреляций. Но эти события либо причинно не связаны с точками гиперповерхности, где заданы условия λ'_A, либо лежат в будущем по отношению к ним. Таким образом, условия λ'_A могут не исчерпывать всех причин, приводящих к корреляциям, и поэтому содержание вопроса β и ответ на него – b, могут оказаться дополнительными нетривиальными условиями, позволяющими расширить список $\{\alpha,\, \lambda'_A\}$, так что

$$p(a|\alpha;\lambda'_A) \neq p(a|\alpha;b,\beta;\lambda'_A).$$

Через эти новые условия возможно частичное косвенное определение того, что происходит в заштрихованной области рис. 4, и что не отражено в λ'_A.

Что с этой точки зрения можно сказать об условиях λ_A на рис. 4? Белл сформулировал следующий так называемый принцип локальной причинности (Local Casualty – **LC**): *учёт условий λ_A, заданных на "экранирующей" гиперповерхности, в распределении $p(a|\alpha;\lambda_A)$ делает условия в точке B*

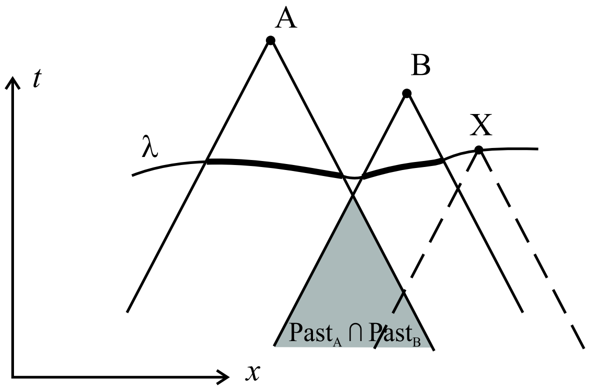

Рис. 5: На обозначенной гиперповерхности заданы условия λ.

тривиальными, т. е. они не приводят к уточнению этого распределения:

$$p(a|\alpha;\lambda_A) = p(a|\alpha;b,\beta;\lambda_A). \tag{3}$$

Принцип **LC** позволяет сделать весьма важные и нетривиальные заключения о структуре совместного распределения вероятностей $p(a,b|\alpha,\beta)$. Для этого уточним изучаемое распределение, включив условия λ на пространственно-подобной гиперповерхности, как изображено на рис. 5. Имеем согласно байесовским правилам вычисления условных вероятностей

$$p(a,b|\alpha,\beta;\lambda) =$$

$$= p(a|\alpha;b,\beta;\lambda)\,p(b|\beta;\lambda) = p(a|\alpha;\lambda)\,p(b|\beta;a,\alpha;\lambda).$$

Здесь записаны тождества, так как по определению

$$\begin{aligned} p(a|\alpha; b, \beta; \lambda) &= \frac{p(a, b|\alpha, \beta; \lambda)}{p(b|\beta; \lambda)}, \\ p(b|\beta; a, \alpha; \lambda) &= \frac{p(a, b|\alpha, \beta; \lambda)}{p(a|\alpha; \lambda)}. \end{aligned}$$

Заметим, что пересечения рассматриваемой гиперповерхности с $Past_A$ и $Past_B$ имеют тот самый "экранирующий" характер из определения **LC**. Поэтому мы получаем, что при учёте условий λ совместное распределение факторизуется:

$$p(a, b|\alpha, \beta; \lambda) = p(a|\alpha; \lambda)\, p(b|\beta; \lambda). \tag{4}$$

При этом для распределения $p(a|\alpha; \lambda)$ из (4) нетривиальными оказываются условия, заданные на той части гиперповерхности, которая пересекается с $Past_A$ (аналогично для $p(b|\beta; \lambda)$ и $Past_B$, эти части выделены на рис. 5). Учёт условий в остальных точках гиперповерхности не меняет вероятность получения Алисой исхода a. Это следует из рассуждений, аналогичных тем, которые привели нас к (3). Действительно, нетрудно заметить, что часть гиперповерхности, входящая в $Past_A$, экранирует событие A от $Past_A \cap Past_X$, где X – любая точка гиперповерхности вне $Past_A$. Поэтому условия в X не могут быть существенными для распределения вероятностей исходов a (аналогичные соображения справедливы для вероятности исхода эксперимента Боба).

В общем случае условия λ не известны точно. Усредняя по распределению $p(\lambda)$ различных λ, получаем

$$p(a, b|\alpha, \beta) = \sum_{\lambda} p(a|\alpha; \lambda)\, p(b|\beta; \lambda)\, p(\lambda). \tag{5}$$

Это есть, как будет показано ниже, чрезвычайно содержательное утверждение о типе и природе корреляций между исходами экспериментов Алисы и Боба. Мы видим, что корреляции между a и b, согласно (5), целиком обусловлены незнанием точных условий λ на гиперповерхности. Поэтому знание исхода b в эксперименте β у Боба даёт некоторую информацию о λ, уточняющую исходное априорное распределение $p(\lambda)$. А это позволяет в свою очередь сделать переоценку вероятности исхода a, т. е.

$$p(a|\alpha; b, \beta) \neq p(a|\alpha).$$

Так и возникают корреляции.

Иногда структура (5) совместного распределения вероятностей, полученная с помощью принципа **LC**, трактуется как определение этого принципа. Заметим, что, как и следовало ожидать, распределение (5) удовлетворяет принципу **NS**, т. е.

$$\mathbf{LC} \Rightarrow \mathbf{NS}.$$

Обратная логическая импликация не верна. Возможны теории, удовлетворяющие запрету на отправку сверхсветовых сигналов, но не подчиняющиеся принципу **LC**. Последний является гипотетическим, хотя и очень правдоподобным, принципом метатеории. Он был сформулирован Беллом именно с целью проверки на соответствие ему квантовой механики. Результаты такой проверки будут изложены далее.

2 Неравенство Белла

Воспользуемся выражением (5) для вывода некоторого экспериментально проверяемого неравенства. Оно принадлежит достаточно широкому классу аналогичных соотношений. За всеми ими закрепилось название "неравенства Белла", хотя ко многим из них сам Белл непосредственного отношения не имел. Неравенство, о котором пойдёт речь, появилось в работе Клаузера (J. F. Clouser), Хорна (M. A. Horne), Шимони (A. Shimony) и Холта (R. A. Holt) и в англоязычной литературе оно часто фигурирует под аббревиатурой CHSH или Bell-CHSH.

Все неравенства Белла выводятся с прицелом на тестирование квантовой механики на предмет её соответствия некоторым общим принципам, в частности принципу **LC**. По этой причине при выводе неравенства Белла обычно сразу предполагается дискретность и конечность множества возможных значений наблюдаемых, как это имеет место, например, для проекций углового момента в квантово-механическом формализме. Мы ограничимся простейшим случаем, когда в экспериментах Алисы и Боба наблюдаемые могут принимать только два значения – $\{+1,\ -1\}$ (это так называемые дихотомные наблюдаемые). Полагаем, что и Алиса и Боб могут проводить эксперименты двух типов – α_1 и α_2 у Алисы, β_1 и β_2 у Боба. Наблюдаемые, которые измеряются в этих экспериментах, обозначим соответственно $\mathcal{A}(\alpha_1)$, $\mathcal{A}(\alpha_2)$, $\mathcal{B}(\beta_1)$ и $\mathcal{B}(\beta_2)$. Комбинируя эксперименты различных типов, Алиса и Боб могут провести четыре серии наблюдений для определения средних величин (корреляторов) $\langle\mathcal{A}(\alpha_i)\mathcal{B}(\beta_j)\rangle$, где $i, j = 1, 2$. В нашей метатеории эти средние выражаются естественным образом через совместное распределение вероятностей:

$$\langle\mathcal{A}(\alpha)\mathcal{B}(\beta)\rangle = \sum_{a,b} ab\, p(a, b|\alpha, \beta). \tag{6}$$

Мы собираемся использовать в этом соотношении выражение (5) для совместной вероятности, полученной из принципа **LC**. Полагаем, что при моделировании в нашей метатеории всех четырёх серий экспериментов мы можем считать

$p(\lambda)$ некоторым заданным распределением вероятностей (не меняющимся от серии к серии). Эти естественные предварительные ограничения соответствуют ситуации в квантовой механике, с которой, как уже было сказано, предполагается конечное сравнение. Мы знаем, что базовым в КМ является понятие состояния и возможность осуществлять приготовление системы в заданном состоянии нужное число раз для проведения серии измерений. Таким образом, в нашей метатеории Мир, как "чёрный ящик", готов к ответам на любые "вопросы" Алисы и Боба, имея одно и то же "внутреннее устройство".

Рассмотрим следующую комбинацию средних (так называемую белловскую комбинацию), определяемых в четырёх сериях измерений:

$$\langle S_{Bell}\rangle \doteq \frac{1}{2}\Big(\langle\mathcal{A}(\alpha_1)\mathcal{B}(\beta_1)\rangle + \langle\mathcal{A}(\alpha_1)\mathcal{B}(\beta_2)\rangle + \\ + \langle\mathcal{A}(\alpha_2)\mathcal{B}(\beta_1)\rangle - \langle\mathcal{A}(\alpha_2)\mathcal{B}(\beta_2)\rangle\Big). \tag{7}$$

С использованием (5) имеем:

$$\langle S_{Bell}\rangle = \frac{1}{2}\sum_{\lambda}\Big[\langle\mathcal{A}(\alpha_1)\rangle_\lambda\Big(\langle\mathcal{B}(\beta_1)\rangle_\lambda + \langle\mathcal{B}(\beta_2)\rangle_\lambda\Big) + \tag{8}\\ + \langle\mathcal{A}(\alpha_2)\rangle_\lambda\Big(\langle\mathcal{B}(\beta_1)\rangle_\lambda - \langle\mathcal{B}(\beta_2)\rangle_\lambda\Big)\Big]\,p(\lambda).$$

Здесь

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{A}(\alpha_i)\rangle_\lambda &= \sum_{a=\pm1} a\,p(a|\alpha_i;\lambda),\\ \langle\mathcal{B}(\beta_j)\rangle_\lambda &= \sum_{b=\pm1} b\,p(b|\beta_j;\lambda).\end{aligned}$$

Ясно, что для любых λ $|\langle\mathcal{A}(\alpha_i)\rangle_\lambda| \leq 1$ и $|\langle\mathcal{B}(\beta_j)\rangle_\lambda| \leq 1$. Из этого следует, что коэффициент при $p(\lambda)$ в правой части (8) по модулю не превосходит 1. Действительно, предположим, что при некотором λ_0 этот коэффициент по модулю больше 1 и для определённости положителен. Для этого должны быть положительны оба слагаемых в квадратных скобках. Мы не уменьшим данный коэффициент, если, не меняя знаков величин $\langle\mathcal{A}(\alpha_1)\rangle_{\lambda_0}$ и $\langle\mathcal{A}(\alpha_2)\rangle_{\lambda_0}$, заменим их числами, равными по модулю 1. Однако результатом этого будет замена всего коэффициента на величину, равную $|\langle\mathcal{B}(\beta_1)\rangle_{\lambda_0}|$ или $|\langle\mathcal{B}(\beta_2)\rangle_{\lambda_0}|$. А эти числа не превосходят 1. Мы получили противоречие с исходным предположением.

Коль скоро правая часть (8) оказалась суммой по всем λ вероятностей $p(\lambda)$ с коэффициентами из интервала $[-1, 1]$, то результат суммирования также лежит в этом интервале, т. е.

$$-1 \leq \langle S_{Bell}\rangle \leq 1. \tag{9}$$

Это и есть неравенство Белла.

При выводе этого неравенства в литературе обычно пользуются понятием так называемых "скрытых параметров". Этим термином именуют используемый нами символ λ. Своим происхождением понятие скрытых параметров обязано уже неоднократно упоминавшейся выше ориентации представляемых метатеоретических построений на проверку соответствия им стандартной квантовой механики. Гипотетические скрытые параметры призваны изгнать случайность исхода измерения, проводимого над системой в чистом квантовом состоянии. В рамках КМ это есть, как известно, наиболее полное описание системы. Таким образом, скрытые параметры (если они существуют) должны принадлежать некоторому субквантовому уровню описания. В силу предполагаемого "всеопределяющего" статуса скрытых параметров естественным вариантом соответствующей метатеории является детерминистический, где существуют функции $\mathcal{A}(\alpha, \lambda)$ и $\mathcal{B}(\beta, \lambda)$, такие, что для условных вероятностей из (4) и (5) мы имеем:

$$p(a|\alpha; \lambda) = \delta_{a,\mathcal{A}(\alpha,\lambda)},\ p(b|\beta; \lambda) = \delta_{b,\mathcal{B}(\beta,\lambda)}.$$

При этом распределение $p(\lambda)$ претендует на роль представителя квантового состояния. Таким образом, в рамках теории со скрытыми параметрами квантово-механический ансамбль, задаваемый некоторым квантовым состоянием (чистым или смешанным), на субквантовом уровне предполагается представить вполне классическим распределением по скрытым параметрам.

3 Неравенство Белла в квантовой механике

Проверим теперь квантовую механику на предмет выполнения в ней неравенства Белла (9). В качестве дополнительного условия при вычислении вероятностей мы будем иметь дело с двухчастичным квантовым состоянием $\hat{\varrho}$. Оно приготовлено в области совместного прошлого событий A и B и является оператором, действующим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Здесь $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ есть двумерные пространства внутренних (спиновых) состояний частиц, поступающих в распоряжение Алисы и Боба (рис. 6). Оба они согласно построениям предыдущего параграфа могут проводить по два типа экспериментов – измерение удвоенной проекции спина соответствующей частицы вдоль направлений $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$ у Алисы и $\boldsymbol{\beta}_1$ и $\boldsymbol{\beta}_2$ у Боба ($\boldsymbol{\alpha}_i$ и $\boldsymbol{\beta}_j$ – действительные

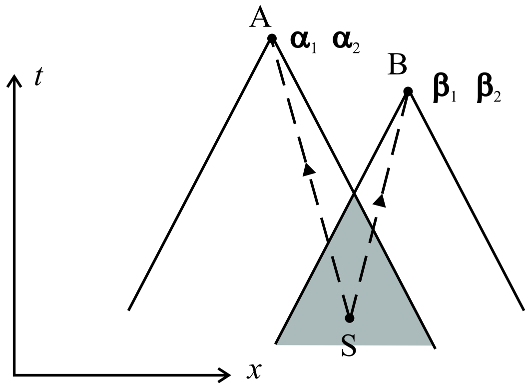

Рис. 6: S – событие рождения синглетной пары частиц со спином 1/2.

единичные вектора). Таким образом, Алиса измеряет наблюдаемые

$$\hat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}_i) \otimes \hat{1} = 2(\hat{\mathbf{S}}_A \cdot \boldsymbol{\alpha}_i) = (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\alpha}_i) \otimes \hat{1}, \tag{10}$$

а Боб – наблюдаемые

$$\hat{1} \otimes \hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\beta}_j) = 2(\hat{\mathbf{S}}_B \cdot \boldsymbol{\beta}_j) = \hat{1} \otimes (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\beta}_j). \tag{11}$$

Здесь $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{e}_x\hat{\sigma}_x + \mathbf{e}_y\hat{\sigma}_y + \mathbf{e}_z\hat{\sigma}_z$; $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ – матрицы Паули. Выражения (10) и (11) представлены как операторы в пространстве $\mathcal{H}$, а сами $\hat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha})$ и $\hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\beta})$ действуют в разных сомножителях тензорного произведения $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ и поэтому коммутируют. Данное свойство есть отражение факта проведения экспериментов Алисы и Боба во взаимно причинно-несвязанных областях пространства-времени.

Каждая из наблюдаемых представима в виде

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}) &= \sum_{a=\pm 1} a\,\hat{P}_a(\boldsymbol{\alpha}),\\
\hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\beta}) &= \sum_{b=\pm 1} b\,\hat{P}_b(\boldsymbol{\beta}),
\end{aligned}
$$

где $\hat{P}_a(\boldsymbol{\alpha})$ и $\hat{P}_b(\boldsymbol{\beta})$ – проекторы на соответствующие собственные состояния:

$$
\begin{aligned}
\hat{P}_a(\boldsymbol{\alpha}) &= (\hat{1}_{\mathcal{H}_A} + a\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{\alpha})/2,\\
\hat{P}_b(\boldsymbol{\beta}) &= (\hat{1}_{\mathcal{H}_B} + b\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{\beta})/2.
\end{aligned}
$$

Эти проекторы нужны нам для вычисления совместного квантово-механического распределения вероятностей исходов измерений:

$$
p(a,b|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta};\hat{\varrho}) = Tr_{\mathcal{H}_A,\mathcal{H}_B}\,[\hat{\varrho}\,\hat{P}_a(\boldsymbol{\alpha})\otimes\hat{P}_b(\boldsymbol{\beta})] \tag{12}
$$

Заметим, что данное распределение удовлетворяет принципу **NS**:

$$
\begin{aligned}
\sum_b p(a,b|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta};\hat{\varrho}) = Tr_{\mathcal{H}_A,\mathcal{H}_B}\,[\hat{\varrho}\,\hat{P}_a(\boldsymbol{\alpha})\otimes\hat{1}] &= p(a|\boldsymbol{\alpha};\hat{\varrho}),\\
\sum_a p(a,b|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta};\hat{\varrho}) = Tr_{\mathcal{H}_A,\mathcal{H}_B}\,[\hat{\varrho}\,\hat{1}\otimes\hat{P}_b(\boldsymbol{\beta})] &= p(b|\boldsymbol{\beta};\hat{\varrho})
\end{aligned}
$$

Этот факт есть следствие полноты набора собственных состояний наблюдаемых в КМ:

$$
\sum_a \hat{P}_a(\boldsymbol{\alpha}) = \hat{1}_{\mathcal{H}_A},\quad \sum_b \hat{P}_b(\boldsymbol{\beta}) = \hat{1}_{\mathcal{H}_B}.
$$

Построим квантово-механический вариант комбинации Белла (7):

$$
\langle S_{Bell}\rangle_{QM} = Tr_{\mathcal{H}_A,\mathcal{H}_B}\,\hat{\varrho}\hat{S}_{Bell},
$$

где

$$\hat{S}_{Bell} \doteq \tag{13}$$

$$\doteq \frac{1}{2}\hat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}_1) \otimes \Big(\hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\beta}_1) + \hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\beta}_2)\Big) + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}_2) \otimes \Big(\hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\beta}_1) - \hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\beta}_2)\Big)$$

есть так называемый оператор Белла.

Для получения численного значения $\langle S_{Bell}\rangle_{QM}$ необходимо конкретизировать состояние $\hat{\varrho}$ и направления $\boldsymbol{\alpha_i}$ и $\boldsymbol{\beta_j}$. Будем считать, что пара частиц приготавливается в синглетном состоянии: $\hat{\varrho} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, где

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle\Big). \tag{14}$$

$|\pm\rangle$ – состояния частиц с проекцией спина $\pm 1/2$ на некоторое выделенное направление, например z. Синглетное состояние инвариантно относительно пространственных поворотов. Поэтому квантово-механическое среднее для произведения исходов экспериментов Алисы и Боба

$$\langle\hat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}) \otimes \hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\beta})\rangle_{QM} \equiv \langle\psi_0|(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \otimes (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\beta})|\psi_0\rangle$$

должно выражаться через некоторую инвариантную комбинацию векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, линейную относительно их компонент. Такими свойствами обладает скалярное произведение $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})$. Постоянный множитель легко угадывается из рассмотрения частного случая $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$. Тогда, как следует из (14), результаты измерений спинов частиц должны строго антикоррелировать. Следовательно,

$$\langle\hat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}) \otimes \hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\beta})\rangle_{QM} = -(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}). \tag{15}$$

Для $\langle S_{Bell}\rangle_{QM}$ имеем:

$$\langle S_{Bell}\rangle_{QM} = -\boldsymbol{\alpha}_1 \cdot (\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2)/2 - \boldsymbol{\alpha}_2 \cdot (\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2)/2. \tag{16}$$

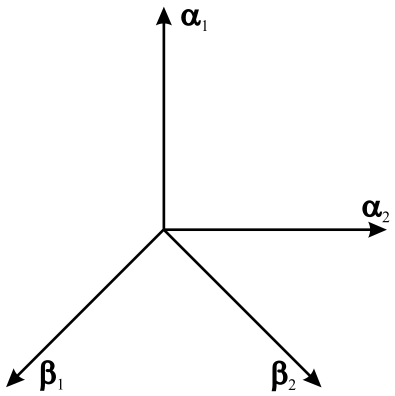

Рис. 7: Взаимная ориентация направлений, вдоль которых Алиса и Боб измеряют проекции спинов.

Нетрудно оценить верхнюю границу, которую может принимать модуль правой части (16):

$$|\langle S_{Bell}\rangle_{QM}| \leq |\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2|/2 + |\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2|/2 =$$

$$= \sqrt{(1 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2)/2} + \sqrt{(1 - \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}_2)/2} \leq \sqrt{2}. \qquad (17)$$

Покажем, что данный предел действительно достижим. Из (17) следует, что $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1}}$ и $\boldsymbol{\beta}_2$ должны быть ортогональны. Из симметрии между A и B следует аналогичное заключение о паре $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$. Расположим все четыре вектора в одной плоскости, например так, как это показано на рис. 7. Получаем для данной конфигурации:

$$\langle S_{Bell}\rangle_{QM} = \sqrt{2}.$$

Неравенство Белла оказывается нарушенным более чем на 40 %!

Этот результат позволяет нам сделать весьма важный вывод: для квантового состояния $|\psi_0\rangle$ из (14) совместная вероятность $p(a, b|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \psi_0)$ не представима в виде (5), т. е. не выполняется принцип **LC**. *Условимся это явление (нарушение принципа* **LC***) называть нелокальностью квантовой механики.*

На данный факт можно взглянуть несколько иначе, если руководствоваться идеей о невозможности дальнейшего уточнения состояния системы, находящейся в чистом квантовом состоянии $|\psi_0\rangle$. Тогда любое возможное описание такого состояния с помощью распределения $p(\lambda)$ тривиально, так как $p(\lambda)$ обращается в единицу для символа λ_0 – представителя состояния $|\psi_0\rangle$, а для всех остальных символов это есть ноль. Тогда, если бы выполнялся принцип **LC**, мы должны были бы ожидать факторизацию распределения $p(a, b|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}; \psi_0)$ аналогично (4), т. е. корреляций между a и b вообще не должно быть. Но корреляции есть:

$$
\begin{aligned}
p(a|\boldsymbol{\alpha}; b, \boldsymbol{\beta}; \psi_0) &\neq p(a|\boldsymbol{\alpha}; \psi_0), \\
p(b|\boldsymbol{\beta}; a, \boldsymbol{\alpha}; \psi_0) &\neq p(b|\boldsymbol{\beta}; \psi_0),
\end{aligned}
$$

и список условий у $p(a|\boldsymbol{\alpha}; \psi_0)$ (аналогично у $p(a|\boldsymbol{\beta}; \psi_0)$) можно нетривиальным образом расширить за счёт описания событий в причинно-несвязанной с событием A (событием B) области.

Заметим, что избранный природой способ нарушения принципа **LC** не затрагивает принцип **NS**, справедливость которого в КМ нами была отмечена выше. Несмотря на то, что расширение списка условий $p(a|\boldsymbol{\alpha}; \psi_0) \to p(a|\boldsymbol{\alpha}; b, \boldsymbol{\beta}; \psi_0)$ содержит параметр β, описывающий тип эксперимента, выбранного Бобом, этот символ обязательно идёт "в комплекте" с исходом b соответствующего эксперимента, и не во власти

Боба повлиять на этот исход. Сверхсветовой телеграф между Алисой и Бобом оказывается всё-таки невозможным.

4 Зацепленные и сепарабельные квантовые состояния

В предыдущем параграфе мы показали, что для пары частиц со спином 1/2, находящейся в синглетном состоянии, неравенство Белла нарушается. Можно, однако, указать квантовые состояния, для которых принцип **LC** и соответственно неравенство Белла будут выполнены. Рассмотрим следующую конструкцию источника пар частиц. Пусть мы имеем пару одночастичных источников S_A и S_B, рождающих частицы в состояниях, принадлежащих некоторым стандартным наборам $\{\hat{\varrho}_A(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ для S_A и $\{\hat{\varrho}_B(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ для S_B. Сценарий, по которому должны сработать источники, задаётся внешним сигналом λ. А этот сигнал в свою очередь генерируется случайным источником RG, для которого известна вероятность $p(\lambda)$ генерировать тот или иной сигнал $\lambda \in \Lambda$ (рис. 8). После рождения пары частиц известно, что они родились по сценарию λ с вероятностью $p(\lambda)$. Поэтому двухчастичный статистический оператор $\hat{\varrho}_{AB}$ есть

$$\hat{\varrho}_{AB} = \sum_{\lambda\in\Lambda} p(\lambda)\, \hat{\varrho}_A(\lambda) \otimes \hat{\varrho}_B(\lambda). \tag{18}$$

Совместное распределение вероятностей $p(a, b|\alpha, \beta; \hat{\varrho}_{AB})$ вычисляется по правилу (12) и имеет вид

$$p(a, b|\alpha, \beta; \hat{\varrho}_{AB}) = \sum_{\lambda\in\Lambda} p(\lambda)\, p(a|\alpha; \hat{\varrho}_A(\lambda))\, p(b|\beta; \hat{\varrho}_B(\lambda)), \tag{19}$$

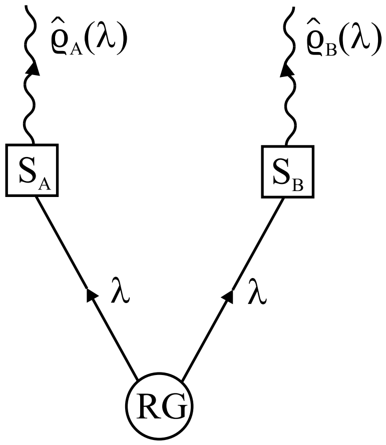

Рис. 8: Схема источника сепарабельных состояний.

где

$$p(a|\alpha;\hat{\varrho}_A(\lambda)) = Tr_{\mathcal{H}_A}\,\hat{\varrho}_A(\lambda)\hat{P}_a(\alpha) \tag{20}$$

и

$$p(b|\beta;\hat{\varrho}_B(\lambda)) = Tr_{\mathcal{H}_B}\,\hat{\varrho}_B(\lambda)\hat{P}_b(\beta).$$

Выражение (19) имеет структуру (5) и поэтому согласовано с принципом **LC**. Заметим, что акт срабатывания случайного источника должен находиться в $PastA \cap PastB$, а события рождения частиц могут быть локализованы на экранирующих фрагментах гиперповерхности, отмеченных на рис. 5. Сигнал λ является при этом так называемой общей причиной (в англоязычной литературе – common cause), задающей состояния обеих частиц.

Состояния составной квантовой системы, имеющие структуру (18), называются *сепарабельными* (separable states). Все остальные состояния, которые невозможно представить в виде (18), называются *зацепленными* (entangled states). Очевидно, что для всех сепарабельных состояний должно выполняться неравенство Белла (9). Из этого факта можно заключить, что синглетное состояние (14) является зацепленным.

В чём же фундаментальное различие сепарабельных и зацепленных состояний? Можно сказать, что они задают разные типы корреляций между подсистемами единой квантовой системы. Корреляции, описываемые сепарабельным состоянием (18), называются классическими. Это название оправдано тем, что классическим является источник RG случайного сигнала. Несколько забегая вперёд, мы можем сказать, что термин "классический" в данном случае отражает факт возможного копирования содержания сигнала λ и превращения его в "сигнал для всех", а не только для источников S_A и S_B. Ничто в принципе не мешает Алисе и Бобу узнать содержание этого сигнала. Эта информация, т. е. знание конкретного значения $\lambda = \lambda_0$, позволила бы Алисе и Бобу уточнить состояние пары частиц, оказавшихся в их распоряжении:

$$\hat{\varrho}_{AB} \to \hat{\varrho}_A(\lambda_0) \otimes \hat{\varrho}_B(\lambda_0).$$

При этом совместное распределение вероятностей исходов экспериментов также преобразуется и уже не содержит никаких корреляций:

$$p(a, b|\alpha, \beta; \hat{\varrho}_{AB}) \to p(a|\alpha; \hat{\varrho}_A(\lambda_0))\, p(b|\beta; \hat{\varrho}_B(\lambda_0)).$$

Таким образом, корреляции в сепарабельном состоянии (18), так же как и в распределении вероятностей (5), обусловлены незнанием точного условия λ.

Так выглядят классические корреляции. Зацепленные состояния демонстрируют возможность корреляций новой – квантовой – природы. Эта природа по сей день есть "камень преткновения и соблазн для многих". Различные аспекты феномена зацепленности будут главным предметом нашего дальнейшего интереса.

Завершим этот параграф рассмотрением следующей простой задачи: если мы знаем, что совместное распределение вероятностей исходов экспериментов Алисы и Боба описывается выражением (5), можем ли мы построить соответствующее квантовое состояние вида (19) *с тем же самым* распределением $p(\lambda)$? Будем считать, что для каждого символа α и β определены операторы наблюдаемых $\hat{\mathcal{A}}(\alpha)$ и $\hat{\mathcal{B}}(\beta)$, действующие в пространствах $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$. При таких предпосылках построение $\hat{\varrho}_{AB}$ становится почти тривиальным упражнением. Почти, так как от фигурирующих в (5) вероятностей требуется соответствия определённым условиям, следующим из того факта, что по совокупности $p(a|\alpha;\lambda)$ надо восстановить $\hat{\varrho}_A(\lambda)$ из (18) так, чтобы совпали $p(a|\alpha;\lambda)$ из (5) и $p(a|\alpha;\hat{\varrho}_A(\lambda))$ из (20) (аналогично для $p(b|\beta;\lambda)$ и $p(b|\beta;\hat{\varrho}_B(\lambda))$). Положим

$$\hat{\varrho}_A(\lambda) = \sum_a \frac{p(a|\alpha;\lambda)}{d(a,\alpha)}\, \hat{P}_a(\alpha). \tag{21}$$

Здесь $d(a,\alpha)$ – размерность области значений проектора $\hat{P}_a(\alpha)$ (это есть степень вырождения собственного значения a оператора $\hat{\mathcal{A}}(\alpha)$)[3]. Заметим, что в слагаемые правой части (21) входит символ α, специфицирующий тип проводимого эксперимента. Результат суммирования, однако, не должен зависеть от α. Из этого факта следует упомянутое ограничение – связь между $p(a|\alpha;\lambda)$ и $p(a'|\alpha';\lambda)$ при $\alpha \neq \alpha'$:

$$p(a'|\alpha';\lambda) = \sum_a Tr_{\mathcal{H}_A}\, \hat{P}_a(\alpha)\hat{P}_{a'}(\alpha')\, \frac{p(a|\alpha;\lambda)}{d(a,\alpha)}.$$

[3]Появление $d(a,\alpha)$ обеспечивает условие $Tr_{\mathcal{H}_A}\, \hat{\varrho}_A(\lambda) = 1$, так как $Tr_{\mathcal{H}_A}\, \hat{P}_a(\alpha) = d(a,\alpha)$.

Мы имеем необходимое и достаточное условие для восстановления $\hat{\varrho}_{AB}$ из (5).

5 Обобщённое неравенство Белла

Обратимся снова к структуре (5) для совместного распределения вероятностей исходов экспериментов Алисы и Боба, полученной из принципа **LC**. Заметим, что эта структура позволяет построить интересный объект – совместное распределение вероятностей всех четырёх экспериментов из вывода неравенства Белла. А именно, введём

$$p(a_1, a_2, b_1, b_2) =$$

$$= \sum_{\lambda} p(a_1|\alpha_1; \lambda) p(a_2|\alpha_2; \lambda) p(b_1|\beta_1; \lambda) p(b_2|\beta_2; \lambda)\, p(\lambda). \qquad (22)$$

В левой части для краткости не указаны типы проводимых экспериментов, но соответствующими индексами снабжены получаемые в результате измерений величины. Суммируя распределение (22) по значениям некоторой пары аргументов (a_i, b_j), мы получаем совместное распределение вероятностей для значений из дополнительной пары. А это распределение описывает одну из четырёх серий измерений, необходимых для вычисления комбинации Белла (7).

Распределение (22) подсказывает новый способ вывода неравенства Белла, допускающий весьма интересные и поучительные обобщения. Для реализации этих возможностей заметим, что аргументом распределения (22) является четвёрка чисел, каждое из которых принимает значения ± 1. Всего существует $2^4 = 16$ возможных комбинаций. Пронумеруем их индексом $M = 1, \ldots, 16$. Вместо $p(a_1, a_2, b_1, b_2)$ будем писать p_M, где M соответствует четвёрке (a_1, a_2, b_1, b_2). Введём наборы чисел $\mathcal{A}_M(\alpha_1)$, $\mathcal{A}_M(\alpha_2)$, $\mathcal{B}_M(\beta_1)$ и $\mathcal{B}_M(\beta_2)$. Здесь $\mathcal{A}_M(\alpha_1)$ есть первый член в четвёрке чисел, соответствующей символу M, $\mathcal{A}_M(\alpha_2)$ есть второй член и т. д. Построим комбинацию Белла, индексированную символом M:

$$S_M = \frac{1}{2}\Bigg[\mathcal{A}_M(\alpha_1)\Bigg(\mathcal{B}_M(\beta_1) + \mathcal{B}_M(\beta_2)\Bigg) +$$

$$+\mathcal{A}_M(\alpha_2)\Bigg(\mathcal{B}_M(\beta_1) - \mathcal{B}_M(\beta_2)\Bigg)\Bigg].$$

Также как и каждое из входящих в правую часть чисел S_M может принимать только значения ± 1. Следовательно, результат усреднения S_M по распределению p_M лежит в интервале $[-1,\, 1]$. Этот факт и есть неравенство Белла (9), так как

$$\langle S_{Bell} \rangle = \sum_M p_M \, S_M.$$

Теперь нетрудно понять, как выглядит обобщение неравенства Белла на случай N наблюдателей ($N \geq 3$). Пусть, как и в случае $N = 2$, каждый из наблюдателей может проводить эксперименты двух типов. Мы несколько изменим обозначения и будем говорить о "штрихованном" и "нештрихованном" экспериментах. Таким образом, i-й экспериментатор измеряет одну из двух наблюдаемых $\mathcal{A}^{(i)}$ и $\mathcal{A}'^{(i)}$, принимающих значения ± 1.

Предполагая выполненным принцип **LC**, мы можем построить совместное распределение вероятностей[4]:

$$p(a^{(1)}, a'^{(1)}, \ldots, a^{(N)}, a'^{(N)}) =$$

[4]Как и ранее, предполагается, что все эксперименты проводятся во взаимно причинно-несвязанных областях пространства-времени.

$$= \sum_{\lambda} p(\lambda) \left(\prod_{i=1}^{N} p(a^{(i)}|\alpha^{(i)};\lambda) p(a'^{(i)}|\alpha'^{(i)};\lambda) \right).$$

Так же, как и в случае $N = 2$, индексируем цепочку чисел $(a^{(1)}, a'^{(1)}, \ldots, a^{(N)}, a'^{(N)})$ символом $M \in \{1, \ldots, 2^{2N}\}$ и вводим очевидным образом наборы $\mathcal{A}_M^{(i)}$, $\mathcal{A}_M^{(i)\prime}$ $(i = 1, \ldots, N)$. Теперь последовательно строим $S_M^{(k)}$ – M-ые комбинации Белла для первых k наблюдателей по следующему правилу:

$$S_M^{(1)} \doteq \mathcal{A}_M^{(1)}, \quad S_M^{(1)\prime} \doteq \mathcal{A}_M^{(1)\prime}; \ \ldots$$

$$\begin{aligned} S_M^{(k)} &\doteq \frac{1}{2}\Big[S_M^{(k-1)} \Big(\mathcal{A}_M^{(k)} + \mathcal{A}_M^{(k)\prime} \Big) + S_M^{(k-1)\prime} \Big(\mathcal{A}_M^{(k)} - \mathcal{A}_M^{(k)\prime} \Big) \Big], \\ S_M^{(k)\prime} &\doteq \frac{1}{2}\Big[S_M^{(k-1)\prime} \Big(\mathcal{A}_M^{(k)\prime} + \mathcal{A}_M^{(k)} \Big) + S_M^{(k-1)} \Big(\mathcal{A}_M^{(k)\prime} - \mathcal{A}_M^{(k)} \Big) \Big]. \\ \ldots\ldots \end{aligned} \tag{23}$$

Из построения (23) очевидно, что $S_M^{(k)}$ принимает значения ± 1 для всех $k = 1, \ldots, N$. Из этого факта следует обобщённое неравенство Белла:

$$-1 \le \langle S_{Bell}^{(N)} \rangle \le 1, \tag{24}$$

где $S_{Bell}^{(N)} = \sum_M p_M \, S_M^{(N)}$.

Важный частный случай $N = 3$ понадобится нам ниже. Обозначим $\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}^{(2)} = \mathcal{B}$, $\mathcal{A}^{(3)} = \mathcal{C}$. В англоязычной литературе это выражается добавлением в компанию к Алисе и Бобу третьего наблюдателя – Чарльза (Charles). Имеем из (23) при $k = 3$:

$$\langle S^{(3)} \rangle = \frac{1}{2} \Big(\langle \mathcal{A}'\mathcal{B}\mathcal{C} \rangle + \langle \mathcal{A}\mathcal{B}'\mathcal{C} \rangle + \langle \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}' \rangle - \langle \mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}' \rangle \Big). \tag{25}$$

Для вычисления (25), как и в случае $N = 2$, требуется четыре серии экспериментов. Нарушение этого неравенства в КМ будет рассмотрено в следующем параграфе.

Главной нетривиальной предпосылкой вывода неравенства (24) является предположение о существовании совместного распределения вероятностей исходов всех экспериментов, необходимых для вычисления комбинации Белла. Мы выводили это распределение из принципа **LC**, но, как представляется, постулат о существовании "глобального" совместного распределения вероятностей является более общим. Если принять его, можно выводить неравенства Белла без ссылок на понятие локальной причинности.

С точки зрения стандартного аппарата КМ уже совместное распределение $p(a_1, a_2, b_1, b_2)$, применяемое в выводе неравенства Белла для двух наблюдателей, есть весьма странный объект. Действительно, если просуммировать его по b_1 и b_2, мы получим совместное распределение вероятностей $p(a_1, a_2|\alpha_1, \alpha_2)$ исходов двух альтернативных экспериментов, проводимых Алисой (мы восстановили в обозначениях список условий – типов проводимых экспериментов). Эти эксперименты являются в общем случае взаимно исключающими, и в квантовой механике распределения такого рода не фигурируют. Из совместного распределения $p(a_1, a_2|\alpha_1, \alpha_2)$ можно, пользуясь правилами Байеса, строить условные вероятности типа $p(a_1|\alpha_1; a_2, \alpha_2)$. Эта вероятность отвечает довольно странной ситуации получения исхода a_1, если бы вместо эксперимента α_2, в котором получен результат a_2, был проведён эксперимент α_1. Получается, что мы рассматриваем два альтернативных "мира", различающиеся выбором типа экспериментов, и изучаем корреляции между ними. Такие смысловые конструкции носят в литературе название контрафактуальных. Это не совсем благозвучная калька с термина "counterfactual". Их статус в квантовой механике является предметом дискуссий.

Заметим, что английский язык оказывается более приспособленным для передачи тонкостей сослагательного наклонения, используемого при анализе контрафактуальных конструкций. Например, описание приведённой выше ситуации выглядит примерно так: If (instead of experiment α_2 where she have got a_2) Alice had made α_1, she would have got a_1 with the probability $p(a_1|\alpha_1; a_2, \alpha_2)$. В соответствующей англоязычной литературе чаще используется именно такая конструкция, а не её более близкий к реальному положению дел вариант If (insted of ...) Alice made α_1, she would get a_1 with the probability $p(a_1|\alpha_1; a_2, \alpha_2)$. В русском языке нюансы, различающие эти два предложения, практически непередаваемы.

6 Проверка неравенств Белла в квантовой оптике

Использованию спиновых состояний массивных частиц для проверки неравенств Белла препятствует сложность соответствующей экспериментальной техники. Значительно проще осуществить эту проверку, используя фотоны. Такие эксперименты впервые были проведены в 1981 г. Аленом Аспеком (Alain Aspect, фото на рис. 9) с сотрудниками. В настоящем параграфе мы рассмотрим несколько упрощённые схемы экспериментов по проверке неравенств Белла, которые, однако, дают полноценное представление о физике процессов. Для проверки неравенства Белла с двумя наблюдателями проанализируем следующую схему эксперимента (рис. 10). Излучение накачки попадает на два нелинейных кристалла, в которых происходит процесс распада фотона

Рис. 9: Ален Аспек

накачки на пару фотонов. Это так называемое спонтанное параметрическое преобразование частоты вниз (Spontaneous Parametric Down-Conversion – SPDC). Геометрия установки такова, что в каком бы из нелинейных кристаллов не произошёл акт SPDC, один из родившихся фотонов попадёт в распоряжение Алисы, а второй – в распоряжение Боба. Если интенсивность накачки достаточно мала, пары фотонов рождаются редко и могут служить объектами для проведения серий корреляционных экспериментов. Фотоны, родившиеся в кристалле 1, назовём сигнальными (signal), а родившиеся в кристалле 2 – холостыми (idler). Сигнальные фотоны на пути к детекторам испытывают фазовые задержки α и β, устанавливаемые соответственно Алисой и Бобом. Величины этих задержек суть параметры, определяющие тип проводимых измерений, и аналогичны направления, вдоль которых измеряются проекции спинов частиц, как это имело место выше.

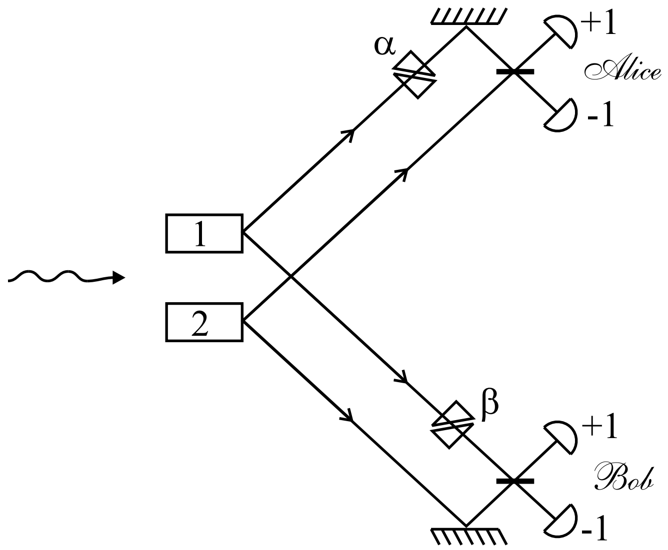

Рис. 10: Схема эксперимента по проверки неравенства Белла для двух наблюдателей.

Каждый фотон, поступивший к Алисе, регистрируется одним из двух детекторов (Боб имеет свою аналогичную пару детекторов). Срабатывание того или иного детектора условно фиксируется как исход $+1$ или -1. Детекторы расположены в выходных портах делителей пучков, на входы которых поступают сигнальный или холостой фотоны.

Обеспечим достаточную поперечную длину когерентности излучения накачки так, что в масштабе этой длины оказываются оба нелинейных кристалла. Тогда попадания фотонов в тот или иной кристалл становятся интерферирующими квантовыми альтернативами. Пусть амплитуды вероятности этих альтернатив равны. Тогда двухфотонное состояние на выходе нелинейных кристаллов можно, используя операторы рождения, записать так:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}_s^\dagger \hat{b}_s^\dagger + \hat{a}_i^\dagger \hat{b}_i^\dagger\right)|vac\rangle. \tag{26}$$

Здесь $\hat{a}_s^\dagger$ и $\hat{b}_s^\dagger$ есть операторы рождения сигнальных фотонов, испущенных соответственно в направлении Алисы и Боба; $\hat{a}_i^\dagger$ и $\hat{b}_i^\dagger$ – операторы рождения холостых фотонов.

Внесение фазовых задержек эквивалентно преобразованию

$$\begin{array}{rcl} \hat{a}_s^\dagger & \mapsto & \hat{a}_s^\dagger(\alpha) \equiv \exp(\imath\alpha)\hat{a}_s^\dagger, \\ \hat{b}_s^\dagger & \mapsto & \hat{b}_s^\dagger(\beta) \equiv \exp(\imath\beta)\hat{b}_s^\dagger. \end{array}$$

Операторы рождения фотонов на выходе делителя пучка (полупрозрачной пластинки) у Алисы, $\hat{a}_{+1}^\dagger(\alpha)$ и $\hat{a}_{-1}^\dagger(\alpha)$, связаны с операторами на входе следующими соотношениями:

$$\hat{a}_{+1}^\dagger(\alpha) = \frac{\hat{a}_s^\dagger(\alpha) + \hat{a}_i^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}_{-1}^\dagger(\alpha) = \frac{\hat{a}_s^\dagger(\alpha) - \hat{a}_i^\dagger}{\sqrt{2}}.$$

Фотон, рождённый оператором $\hat{a}_{+1}^\dagger(\alpha)$, регистрируется детектором "+1", а рождённый оператором $\hat{a}_{-1}^\dagger(\alpha)$ – детектором "−1". Аналогично для Боба имеем:

$$\hat{b}_{+1}^\dagger(\beta) = \frac{\hat{b}_s^\dagger(\beta) + \hat{b}_i^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \hat{b}_{-1}^\dagger(\beta) = \frac{\hat{b}_s^\dagger(\beta) - \hat{b}_i^\dagger}{\sqrt{2}}.$$

Операторы дихотомных наблюдаемых, измеряемых Алисой и Бобом, есть соответственно

$$\hat{\mathcal{A}}(\alpha) = \hat{a}_{+1}^\dagger(\alpha)\hat{a}_{+1}(\alpha) - \hat{a}_{-1}^\dagger(\alpha)\hat{a}_{-1}(\alpha)$$

и
$$\hat{\mathcal{B}}(\beta) = \hat{b}^\dagger_{+1}(\beta)\hat{b}_{+1}(\beta) - \hat{b}^\dagger_{-1}(\beta)\hat{b}_{-1}(\beta).$$
Это разность чисел фотонов, попавших на детекторы "± 1".

После несложных вычислений имеем:
$$\langle\psi|\hat{\mathcal{A}}(\alpha)\hat{\mathcal{B}}(\beta)|\psi\rangle = \cos(\alpha+\beta) \tag{27}$$
Это позволяет нам представить комбинацию Белла для двух наблюдателей (7) в виде
$$\langle S^{(2)}_{Bell}\rangle_\psi = \tag{28}$$
$$= \frac{1}{2}\Bigg(\cos(\alpha_1+\beta_1) + \cos(\alpha_1+\beta_2) + \cos(\alpha_2+\beta_1) - \cos(\alpha_2+\beta_2)\Bigg)$$
Выбираем $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$, $\beta_1 = -\pi/4$, $\beta_2 = \pi/4$. Тогда $\langle S^{(2)}_{Bell}\rangle_\psi = \sqrt{2}$ – неравенство Белла нарушено, и это нарушение максимально возможное, что нетрудно понять, если рассматривать косинусы в выражении (28) как результаты скалярного произведения единичных векторов. Тогда совокупности выбранных фазовых задержек можно сопоставить эффективную совокупность четырёх единичных векторов на плоскости, а для такой системы в (17) было установлено максимально возможное нарушение неравенства Белла.

Если в схеме на рис. 10 допустить возможность нелинейных процессов, при которых фотон накачки превращается в три фотона, у нас появляется способ проверки неравенства Белла для трёх наблюдателей (рис. 11). Трёхфотонное состояние на выходе нелинейных кристаллов при равных амплитудах вероятности рождения тройки сигнальных или холостых фотонов имеет вид:
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}^\dagger_s\hat{b}^\dagger_s\hat{c}^\dagger_s + \hat{a}^\dagger_i\hat{b}^\dagger_i\hat{c}^\dagger_i\right)|vac\rangle. \tag{29}$$

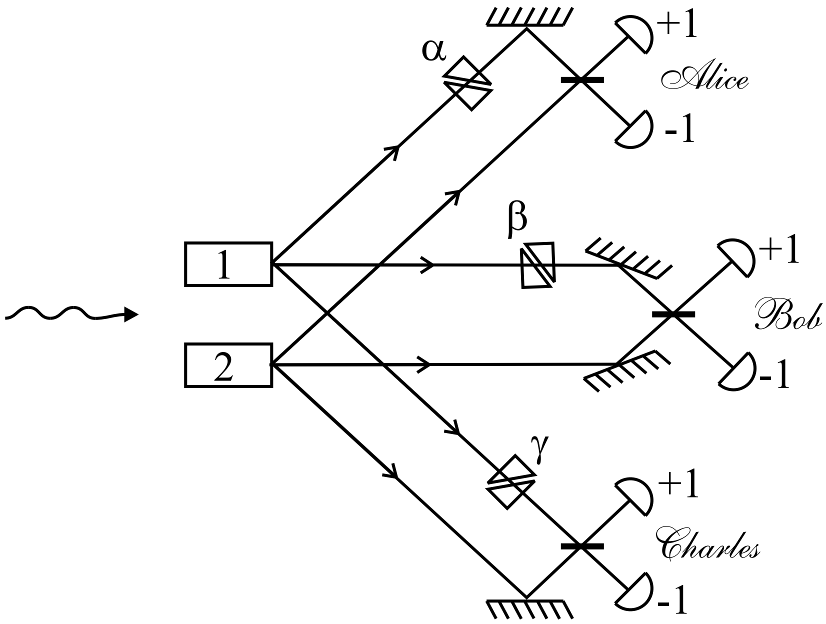

Рис. 11: Схема эксперимента по проверки неравенства Белла для трёх наблюдателей.

Вычисления, аналогичные проведённым выше, дают

$$\langle \Psi | \hat{\mathcal{A}}(\alpha) \hat{\mathcal{B}}(\beta) \hat{\mathcal{C}}(\gamma) | \Psi \rangle = \cos(\alpha + \beta + \gamma).$$

Имеем на этом основании для белловской комбинации (25):

$$\langle S^{(3)}_{Bell} \rangle_\Psi = \frac{1}{2} \Big[\cos(\alpha' + \beta + \gamma) +$$

$$+ \cos(\alpha + \beta' + \gamma) + \cos(\alpha + \beta + \gamma') - \cos(\alpha' + \beta' + \gamma') \Big]. \quad (30)$$

Выберем следующие величины фазовых задержек: $\alpha = \beta = \gamma = -\pi/6$, $\alpha' = \beta' = \gamma' = \pi/3$. В этом случае первые три косинуса в (30) оказываются равными 1, а последний равен -1. В результате имеем:

$$\langle S^{(3)}_{Bell}\rangle_\Psi = 2.$$

Неравенство Белла (25) оказалось нарушенным на 100 %. Таким образом, увеличение числа наблюдателей позволяет "усилить" эффекты специфически квантовых корреляций между причинно-независимыми измерениями.

7 Парадокс Гринбергера–Хорна–Цайлингера

Способ, каким в квантовой механике нарушается неравенство Белла для трёх наблюдателей, весьма любопытен. Заметим, что для состояния (29) мы имеем следующие равенства, записанные в терминах (25):

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}'\mathcal{B}\mathcal{C}\rangle &= 1,\\
\langle \mathcal{A}\mathcal{B}'\mathcal{C}\rangle &= 1,\\
\langle \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}'\rangle &= 1,\\
\langle \mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}'\rangle &= -1.
\end{aligned}$$

Видно, что модули всех четырёх средних достигают максимально возможного значения – единицы. Попробуем оценить этот факт с позиций гипотезы о существовании "глобального"совместного распределения вероятностей $p_M = p(a, a', b, b')$ исходов измерений Алисы, Боба и Чарльза. Мы имеем согласно этой гипотезы

$$\begin{aligned}
\sum_M p_M\, \mathcal{A}'_M \mathcal{B}_M \mathcal{C}_M &= 1, \\
\sum_M p_M\, \mathcal{A}_M \mathcal{B}'_M \mathcal{C}_M &= 1, \\
\sum_M p_M\, \mathcal{A}_M \mathcal{B}_M \mathcal{C}'_M &= 1, \\
\sum_M p_M\, \mathcal{A}'_M \mathcal{B}'_M \mathcal{C}'_M &= -1.
\end{aligned}$$

Из условия $\sum_M p_M = 1$ и из приведённых четырёх соотношений, заключаем:

$$\begin{aligned}
(p_M \neq 0) &\Rightarrow (\mathcal{A}'_M \mathcal{B}_M \mathcal{C}_M = 1), \\
(p_M \neq 0) &\Rightarrow (\mathcal{A}_M \mathcal{B}'_M \mathcal{C}_M = 1), \\
(p_M \neq 0) &\Rightarrow (\mathcal{A}_M \mathcal{B}_M \mathcal{C}'_M = 1), \\
(p_M \neq 0) &\Rightarrow (\mathcal{A}'_M \mathcal{B}'_M \mathcal{C}'_M = -1),
\end{aligned}$$

т. е. для любого M, такого, что $p_M \neq 0$, имеет место

$$(\mathcal{A}'_M \mathcal{B}_M \mathcal{C}_M)\,(\mathcal{A}_M \mathcal{B}'_M \mathcal{C}_M)\,(\mathcal{A}_M \mathcal{B}_M \mathcal{C}'_M)\,(\mathcal{A}'_M \mathcal{B}'_M \mathcal{C}'_M) = -1.$$

Но это равенство есть нонсенс, так как его левая часть представляет собой квадрат числа $(\mathcal{A}_M \mathcal{B}_M \mathcal{C}_M \mathcal{A}'_M \mathcal{B}'_M \mathcal{C}'_M)$, равный единице для любого M. Мы имеем противоречие квантовых предсказаний и гипотезы о существовании распределения p_M, и это противоречие не использует неравенств.

Представленная цепочка рассуждений называется парадоксом Гринбергера–Хорна–Цайлингера (GHZ: Greenberger–Horne–Zeilinger). Иногда используется термин "теорема GHZ"или "теорема Белла без неравенств". Ясно, что центральным объектом теоремы GHZ является состояние (29).

Его обычно записываю в виде

$$|\Psi_{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|+\rangle \otimes |+\rangle \otimes |+\rangle + |-\rangle \otimes |-\rangle \otimes |-\rangle\Big) \qquad (31)$$

Считается, что оно лежит в некотором 8-мерном пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$, где $\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_B$, $\mathcal{H}_C$ – двумерные пространства, в которых выбран базис $\{|+\rangle, |-\rangle\}$. Записи (29) и (31) становятся тождественными, если интерпретировать $|+\rangle$ как запись факта прихода к наблюдателю сигнального фотона, а $|-\rangle$ – как факт прихода холостого фотона. На этом языке состояние (26) есть

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|+\rangle \otimes |+\rangle + |-\rangle \otimes |-\rangle\Big) \qquad (32)$$

Видны его сходство и различие с синглентным состоянием $|\psi_0\rangle$ из (14).

8 Граница Цирельсона и "сверхквантовые" корреляции

Сравнивая структуры (7) и (25) комбинаций Белла для двух и трёх наблюдателей, можно заметить их сходство по числу входящих корреляторов и по сигнатуре слагаемых. В то же время нарушения соответствующих неравенств Белла в квантовой механике происходит по-разному. В случае трёх наблюдателей состояние GHZ позволяет максимально нарушить неравенство Белла. При этом все четыре коррелятора одновременно принимают максимальные значения, допустимые их природой. В случае двух наблюдателей и синглетного состояния пары частиц неравенство Белла нарушено не так драматично. Не есть ли это следствие неудачного выбора состояния? Мы показали в (17), что для синглетного состояния верхней границей нарушения неравенства Белла служит $\sqrt{2}$. Оказывается, что это есть универсальная граница в КМ для дихотомных наблюдаемых. Она известна под именем границы Цирельсона (Cirel'son bound, в другом написании – Tsirel'son bound). Докажем универсальность этой границы. Обратимся к выражению (13) для оператора Белла. Для краткости обозначим $\hat{\mathcal{A}}_i \equiv \hat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}_i)$ и $\hat{\mathcal{B}}_j \equiv \hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\beta}_j)$ $(i, j = 1, 2)$. Имеем по определению: $\hat{\mathcal{A}}_i^2 = \hat{1}_{\mathcal{H}_A}$, $\hat{\mathcal{B}}_j^2 = \hat{1}_{\mathcal{H}_B}$. Нетрудно убедится, что

$$\hat{S}_{Bell}^2 = \hat{1} \otimes \hat{1} - \frac{1}{4}[\hat{\mathcal{A}}_1, \hat{\mathcal{A}}_2] \otimes [\hat{\mathcal{B}}_1, \hat{\mathcal{B}}_2].$$

Для норм операторов имеем[5]:

$$||\hat{S}_{Bell}^2|| = ||\hat{S}_{Bell}||^2 \leq 1 + \frac{1}{4}||[\hat{\mathcal{A}}_1, \hat{\mathcal{A}}_2]||\,||[\hat{\mathcal{B}}_1, \hat{\mathcal{B}}_2]||.$$

Очевидно, что $||\hat{\mathcal{A}}_i|| = ||\hat{\mathcal{B}}_j|| = 1$. На этой основе имеем

$$||[\hat{\mathcal{A}}_1, \hat{\mathcal{A}}_2]|| \leq ||\hat{\mathcal{A}}_1\hat{\mathcal{A}}_2|| + ||\hat{\mathcal{A}}_2\hat{\mathcal{A}}_1|| \leq 2||\hat{\mathcal{A}}_1||\,||\hat{\mathcal{A}}_2|| = 2.$$

Аналогично для $||[\hat{\mathcal{B}}_1, \hat{\mathcal{B}}_2]||$. Следовательно,

$$||\hat{S}_{Bell}|| \leq \sqrt{2}. \tag{33}$$

Никакое среднее $\langle \hat{S}_{Bell} \rangle$ не может по модулю превзойти величину нормы (33). Это и есть граница Цирельсона.

Почему КМ не допускает более сильных корреляций между спинами двух частиц? Не есть ли это плата за выполнение принципа **NS**, т. е. не приведут ли более сильные корреляции к конфликту с причинной структурой пространства-времени? Этот вопрос побудил С. Попэску (Sandu Popescu) и

[5] В конечномерных пространствах, с которыми мы имеем дело, норма оператора есть максимальный модуль его собственных чисел.

Д. Рорлиха (Daniel Rohrlich) к построению модели со "сверхквантовыми" корреляциями, в которой, однако, выполняется принцип **NS**.

Авторы сохранили основное удобное свойство синглетного состояния – инвариантность относительно поворотов и инверсии времени. Благодаря последнему свойству совместная вероятность не изменяется при обращении знаков у a и b:

$$p(a, b|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \equiv p(-a, -b|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}). \tag{34}$$

Следствием этого является возможность выразить эту вероятность через коррелятор (6). Чтобы показать это, упростим обозначения и будем изображать исходы экспериментов как $\pm$. Тогда из условия нормировки совместного распределения имеем

$$p(+,+) + p(+,-) + p(-,-) + p(-,+) = 1. \tag{35}$$

Из (34) и (35) следует:

$$p(+,+) + p(+,-) = p(-,-) + p(-,+) = \frac{1}{2}.$$

Это ни что иное, как демонстрация выполнимости принципа **NS** – исходы эксперимента у Алисы равновероятны и никак не зависят от выбора Боба. Далее из (6) имеем

$$\begin{gathered} \langle \hat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}) \hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\beta}) \rangle = \\ = p(+,+) - p(+,-) + p(-,-) - p(-,+) = \\ = 2\Big(p(+,+) - p(+,-)\Big). \end{gathered} \tag{36}$$

Следовательно,

$$p(a, b|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{4}\Big(1 + ab\langle \hat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}) \hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\beta}) \rangle\Big).$$

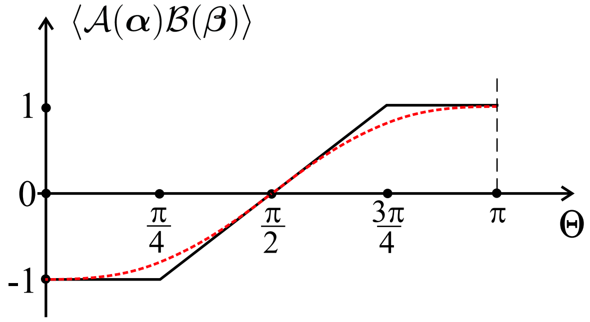

Рис. 12: Зависимость коррелятора наблюдаемых из модели Попэску–Рорлиха от угла между $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$.

Выбирая функцию $\langle \hat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha})\hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\beta})\rangle$ разумным образом (она не может, например, превосходить единицу по модулю), мы получаем совместное распределение вероятностей исходов. Для синглетного состояния величина $\langle \hat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha})\hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\beta})\rangle$ зависела только от угла между $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ (см. (15)) через их скалярное произведение. Попэску и Рорлих выбрали в своей модели коррелятор $\langle \hat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha})\hat{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\beta})\rangle_{PR}$ в виде кусочно-гладкой функции от угла $\Theta = \arccos(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})$. Вид этой функции представлен на рис. 12 в сравнении с соответствующей функцией (косинусом) для квантово-механического синглетного состояния. Для конфигурации направлений, изображённой на рис. 7, имеем в модели Попэску–Рорлиха

$$\langle S_{Bell}\rangle_{PR} = 2.$$

Это и есть "сверхквантовые" корреляции.

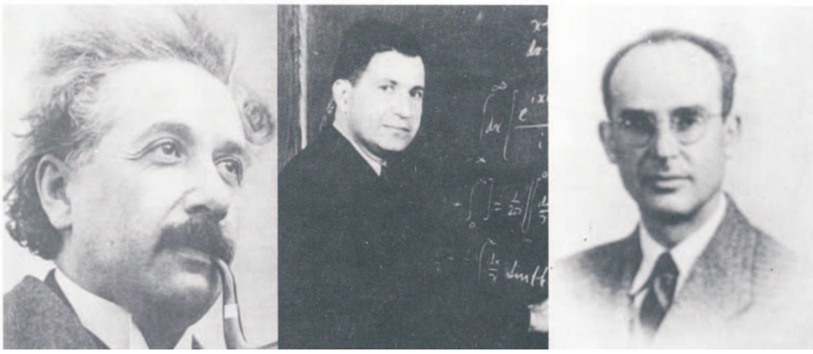

Рис. 13: А. Эйнштейн, Б. Подольский и Н. Розен

9 Парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена

Мы видели, что зацепленные состояния составных квантовых систем демонстрируют особый тип корреляций между разными подсистемами. За 30 лет до открытия неравенства Белла (и ещё до появления термина "зацепленность") необычные свойства таких состояний рассматривались в знаменитой работе Эйнштейна, Подольского[6] и Розена[7] (ЭПР) под названием "Может ли квантово-механическое описание физической реальности считаться полным?"[2]. Именно с точки зрения понятия об объективной физической

[6] Борис Подольский (1896–1966). Родился в Таганроге. В начале 30-х эмигрировал из СССР. Вместе с Л.Ландау задумал написать фундаментальный учебник по классической электродинамике, излагаемой с позиций релятивистской физики. Эта идея была позже реализована Ландау и Лифшицем в "Теории поля".

[7] Натан Розен (1909–1995). Родился в Бруклине. Соавтор А.Эйнштейна по некоторым работам в области ОТО. Один из создателей израильского Техниона (фото на рис. 13).

реальности авторы работы рассматривают особенности КМ. Есть веские основания считать Эйнштейна последним гением классической физики, а работа [2] есть пример великолепного арьергардного сражения, навязанного уходящей классической парадигмой новому квантовому миропониманию. Споры об этой работе не прекращаются уже семь десятков лет и, судя по всему, не утихнут и в ближайшем будущем.

Рассмотрим идею и логику работы. Авторы исследуют КМ на предмет её соответствия понятию так называемой полной теории. Под последней понимается мысленная конструкция, в которой каждый *элемент физической реальности* находит свою (идеальную) копию (counterpart). Таким образом, определение полной теории апеллирует к понятию элемента физической реальности. ЭПР предлагают следующий достаточный критерий для ситуации, когда можно констатировать существование элемента физической реальности: *"Если мы без всякого возмущения системы можем однозначно предсказать значение физической величины, тогда существует соответствующий этой величине элемент физической реальности"*[8].

Слово "предсказать" в этом определении относится к потенциальному эксперименту. Естественная интуиция авторов и читателей требует возможности говорить об элементе физической реальности (о конкретном численном значении) как о существующем до и независимо от этого потенциального эксперимента. Последнее уточнение весьма важно для дальнейшего.

Пример ситуации, удовлетворяющей предложенному кри-

[8]"If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i. e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity".

терию EPR[9], сразу обнаруживается в квантовой механике. А именно, если система находится в состоянии $|\psi\rangle$, являющимся собственным для некоторой наблюдаемой $\hat{A}$:

$$\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle,$$

тогда эта наблюдаемая (точнее, её конкретное значение a) является элементом физической реальности. Из формализма КМ известно, что некоммутирующие наблюдаемые $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ ($[\hat{A}_1, \hat{A}_2] \neq 0$) не могут иметь общего собственного состояния. Этот факт можно, следуя ЭПР, интерпретировать по принципу исключения третьего двояко: либо а) это есть свойство материального мира, и сомнения в полноте КМ, могущие проистекать из этого пункта, необоснованы; либо б) это есть свойство только самой теории, а объективная физическая реальность вполне допускает совместное существование конкретных значений некоммутирующих наблюдаемых $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ до и независимо от всякого эксперимента.

Далее ЭПР обращаются к зацепленному состоянию двухфрагментной системы для доказательства несостоятельности варианта "а". Сами авторы используют не совсем удачный пример состояния двух частиц, зацепленных по координатам и импульсам. Дэвид Бом предложил рассматривать вместо этого синглетное состояние (14) пары частиц со спином 1/2. Мы запишем его в виде

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\mathbf{n}\rangle \otimes |-\mathbf{n}\rangle - |-\mathbf{n}\rangle \otimes |\mathbf{n}\rangle\Big). \qquad (37)$$

Здесь $|\pm\mathbf{n}\rangle$ – состояния частиц с проекцией спина $\pm 1/2$ в направлении единичного вектора $\mathbf{n}$:

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n})|\pm\mathbf{n}\rangle = \pm|\pm\mathbf{n}\rangle.$$

[9] Примечательно, что аббревиатура словосочетания "Element of Physical Reality" та же, что и у коллектива авторов.

THE NEW YORK TIMES, SATURDAY, MAY 4, 1935.

EINSTEIN ATTACKS QUANTUM THEORY

Scientist and Two Colleagues Find It Is Not 'Complete' Even Though 'Correct.'

SEE FULLER ONE POSSIBLE

Believe a Whole Description of 'the Physical Reality' Can Be Provided Eventually.

Copyright 1935 by Science Service.

PRINCETON, N. J., May 3.—Professor Albert Einstein will attack science's important theory of quantum mechanics, a theory of which he was a sort of grandfather. He concludes that while it is "correct" it is not "complete."

With two colleagues at the Institute for Advanced Study here, the noted scientist is about to report to the American Physical Society what is wrong with the theory of quantum mechanics, it has been learned exclusively by Science Service.

The quantum theory, with which science predicts with some success inter-atomic happenings, does not meet the requirements for a satisfactory physical theory, Professor Einstein will report in a joint paper with Dr. Boris Podolsky and Dr. N. Rosen.

In the quantum theory as now used, the latest Einstein paper will point out that where two physical quantities such as the position of a particle and its velocity interact, a knowledge of one quantity precludes knowledge about the other. This is the famous principle of uncertainty put forward by Professor Werner Heisenberg and incorporated in the quantum theory. This very fact, Professor Einstein feels, makes the quantum theory fail in the requirements necessary for a satisfactory physical theory.

Two Requirements Listed.

These two requirements are:

1. The theory should make possible a calculation of the facts of nature and predict results which can be accurately checked by experiment; the theory should be, in other words, correct.

2. Moreover, a satisfactory theory should, as a good image of the objective world, contain a counterpart for things found in the objective world; that is, it must be a complete theory.

Quantum theory, Professor Einstein and his colleagues will report, fulfills the correctness requirement but fails in the completeness requirement.

While proving that present quantum theory does not give a complete description of physical reality, Professor Einstein believes some later, still undeveloped, theory will make this possible. His conclusion is:

"While we have thus shown that the wave function [of quantum theory] does not provide a complete description of the physical reality, we left open the question of whether or not such a description exists. We believe, however, that such a theory is possible."

The development of quantum mechanics has proved very useful in exploring the atom. Six Nobel Prizes in physics, including one to Einstein, have been awarded for various phases of the researches leading up to quantum mechanics. The names of Planck, Bohr, de Broglie, Heisenberg, Dirac and Schroedinger, as well as Einstein, are linked with quantum mechanics.

The exact title of the Einstein-Podolsky-Rosen paper is: "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?"

Explanation by Podolsky.

In explaining the latest view of the physical world as revealed in their researches Dr. Podolsky, one of the authors, said:

"Physicists believe that there exist real material things independent of our minds and our theories. We construct theories and invent words (such as electron, positron, &c.) in an attempt to explain to ourselves what we know about our external world and to help us to obtain further knowledge of it. Before a theory can be considered to be satisfactory it must pass two very severe tests. First, the theory must enable us to calculate facts of nature, and these calculations must agree very accurately with observations and experiments. Second, we expect a satisfactory theory, as a good image of objective reality, to contain a counterpart for every element of the physical world. A theory satisfying the first requirement may be called a correct theory while, if it satisfies the second requirement, it may be called a complete theory.

"Hundreds of thousands of experiments and measurements have shown that, at least in cases when matter moves much slower than light, the theory of Planck, Einstein, Bohr, Heisenberg and Schroedinger known as quantum mechanics is a correct theory. Einstein, Podolsky and Rosen now discuss the question of the completeness of quantum mechanics. They arrive at the conclusion that quantum mechanics, in its present form, is not complete.

"In quantum mechanics the condition of any physical system, such as an electron, an atom, &c., is supposed to be completely described by a formula known as a 'wave function.' Suppose that we know the wave function for each of two physical systems, and that these two systems come together, interact, and again separate (as when two particles collide and move apart). Quantum mechanics, although giving us considerable information about such a process, does not enable us to calculate the wave function of each physical system after the separation. This fact is made use of in showing that the wave function does not give a complete description of physical reality. Since, however, description of physical systems by wave functions is an essential step of quantum mechanics, this means that quantum mechanics is not a complete theory."

Raises Point of Doubt.

Special to THE NEW YORK TIMES.

PRINCETON, N. J., May 3.—Asked to comment on the new ideas of Professor Einstein and his collaborators, Professor Edward U. Condon, mathematical physicist of Princeton University, said tonight:

"Of course, a great deal of the argument hinges on just what meaning is to be attached to the word 'reality' in connection with physics. They have certainly discussed an interesting point in connection with the theory. Dr. Einstein has never been satisfied with the statistical causality which in the new theories replaces the strict causality of the old physics.

"It is reported that when he first learned of the work of Schroedinger and Dirac, he said, 'Der lieber Gott wuerfelt nicht, [the good Lord does not throw dice]. For the last five years he has subjected the quantum mechanical theories to very searching criticism from this standpoint. But I am afraid that thus far the statistical theories have withstood criticism."

Рис. 14: Номер *New York Times* с интервью Б.Подольского

Ранее уже отмечалось, что $|\psi_0\rangle$ есть объект, инвариантный относительно поворотов. Поэтому запись (37) верна для любого $\mathbf{n}$. Пусть Алиса имеет в своём распоряжении первую частицу и в состоянии произвести измерение проекции её спина вдоль выбранного ей (Алисой) направления $\mathbf{n}$. Результатом измерения будет *a priori* равновероятное и зависящее от исхода изменение состояния

$$
\begin{array}{lll}
 & & |\mathbf{n}\rangle \otimes |-\mathbf{n}\rangle, \text{если Алиса получила } +1/2 \\
 & \nearrow & \\
|\psi_0\rangle & & \\
 & \searrow & \\
 & & |-\mathbf{n}\rangle \otimes |\mathbf{n}\rangle, \text{если Алиса получила } -1/2
\end{array}
\tag{38}
$$

Это так называемая редукция (коллапс) состояния. В обоих случаях возникает ситуация, в которой Алиса однозначно предсказывает исход возможного измерения проекции вдоль $\mathbf{n}$ спина второй частицы, находящейся, например, у Боба. Возникновение этих ситуаций, без всякого сомнения, не сопровождается каким-либо возмущением второй частицы. Очевидны ассоциации с условиями из критерия EPR. Это позволило ЭПР присвоить проекции вдоль $\mathbf{n}$ спина второй частицы статус элемента физической реальности. Но выбор этого направления – произвол Алисы, а элементы физической реальности существуют до и независимо от её экспериментов. Следовательно, элементами физической реальности должны оказаться проекции спина второй частицы вдоль любого направления! Неколлинеарным направлениям отвечают некоммутирующие наблюдаемые в формализме КМ. На этом основании ЭПР отбрасывают вариант "а"и утверждают истинность варианта "б". Такова логика работы[10].

[10]Именно Розен привлёк внимание Эйнштейна к необычным свой-

Заметим, что фактически, помимо утверждения о неполноте квантовой механики, ЭПР пришли к скрытым параметрам. Действительно, существование a priori проекций спина частицы на любое направление эквивалентно существованию функции $\mathcal{A}(\mathbf{n}, \lambda)$ (удвоенной проекции спина), принимающей значения ± 1, где λ – скрытый параметр, определяющий "положение дел", т. е. специфицирующий саму Реальность. Но, как показали эксперименты по проверке неравенств Белла, такого буквального спецификатора физической реальности и определённого "положения дел" не существует. Где-то в рассуждениях ЭПР есть слабое звено. В следующем параграфе предложен некоторый вариант критики идей ЭПР. Не стоит считать его окончательным разрешением парадокса. Поиски такого разрешения заняли и, возможно, ещё займут не один десяток лет. Скорее всего острота интеллектуального дискомфорта, привносимого парадоксом ЭПР, со временем притупится по мере развития способности у физиков к "квантовому способу мышления".

ствам зацепленных состояний. Эйнштейн ухватился за этот феномен как за новое оружие в споре с Бором касательно природы КМ. К их беседам присоединился Подольский и предложил написать совместную статью. Он же и проделал основную работу над текстом. Эйнштейну не совсем понравилось изложение (он поделился этим в письме Шредингеру), но он согласился на публикацию. За две недели до выхода статьи Подольский – горячая голова – дал интервью *New York Times* (рис. 14), где известил, что обнаружен дефект квантовой механики. Эйнштейн пришёл в ярость и больше никогда не общался с Подольским.

10 Реляционная трактовка понятия квантового состояния

Проанализируем критерий EPR. Прежде всего, бросая ретроспективный взгляд на цепь рассуждений в работе ЭПР, можно с определённостью отметить гипнотическое действие, оказываемое словами "без всякого возмущения системы...". Действительно, вторая частица, находясь в пространственно-временной области, не связанной причинно с экспериментом над первой частицей, никоим образом не подвержена влиянию этого эксперимента. Однако состояние второй частицы, в той же степени, как и первой, подвержено явлению редукции (38). Этот факт, несомненно, должен быть удовлетворительно интерпретирован.

Обратим внимание и на слово "мы" в тексте критерия EPR. Кто эти "мы"? Следует ли отнести к этому множеству всех наблюдателей или нет? А если нет, то не следует ли считать, что элемент физической реальности, о котором идёт речь, является таковым, т. е. существует, только по отношению к указанному множеству наблюдателей?

Мы фактически уже кратко наметили позиции, с которых подвергнем критическому анализу логику ЭПР. Из приведённых намёков видно, что необходимо уяснить содержание понятия "квантовое состояние". Мы будем трактовать его как объект реляционной природы, т. е. квантовое состояние не является атрибутом или свойством только самой системы, но есть представление знания о системе некоторой другой системы – наблюдателя. Поэтому разные наблюдатели могут приписывать одной и той же системе разные состояния. Весьма важно уяснить, что такая реляционная концепция отвергает существование "истинных состояний". Задавать вопрос о том, какое состояние системы "на самом деле", так же некорректно, как интересоваться "истинной" картиной, стоящей за релятивистским феноменом взаимного сокращения масштабов и замедления часов в двух находящихся в относительном движении системах отсчёта. Нет никаких иных состояний, кроме реляционных, и каждая система есть не более, чем информация, которой обладают о ней другие системы.

Коль скоро состояние системы определяется по отношению к некоторому наблюдателю, то и элемент физической реальности, чьё существование, согласно логике ЭПР, можно констатировать из факта нахождения ситемы в собственном состоянии соответствующей наблюдаемой, также существует по отношению к данному наблюдателю. Таким образом, следуя Ашеру Пересу, можно сказать, что вопрос о полноте описания физической реальности в рамках КМ, вынесенный в заголовок статьи [2], имеет положительный ответ, но *реальность может быть разной для разных наблюдателей.*

Оценим с позиций такой реляционной трактовки явление редукции (38). Теперь ясно, что и слева, и справа от стрелок стоят состояния пары частиц по отношению к Алисе. До измерения состояние пары было $|\psi_0\rangle$. При этом состояния отдельных частиц были полностью смешанными:

$$\hat{\varrho}_A = Tr_{\mathcal{H}_A}\,|\psi_0\rangle\langle\psi_0| = \frac{1}{2}|\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| + \frac{1}{2}|-\mathbf{n}\rangle\langle-\mathbf{n}|,$$
$$\hat{\varrho}_B = Tr_{\mathcal{H}_B}\,|\psi_0\rangle\langle\psi_0| = \frac{1}{2}|\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| + \frac{1}{2}|-\mathbf{n}\rangle\langle-\mathbf{n}|.$$

После измерения изменилось знание Алисы о частицах. Состояния и первой, и второй частиц являются теперь чистыми. С точки зрения ЭПР для Алисы элементами физической реальности являются проекции спинов частиц на направление $\mathbf{n}$. Заметим, что Алиса сама выбрала множество реальностей

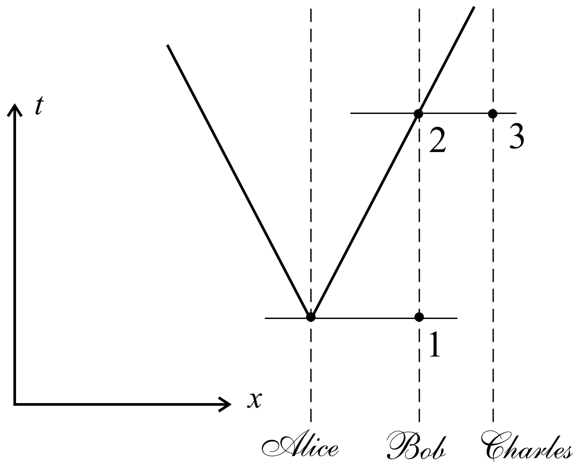

Рис. 15: Расположение мировых линий Алисы, Боба и Чарльза относительно события измерения.

(через выбор направления $\mathbf{n}$), в одной из которых она ощущает себя после эксперимента. А что происходит с точки зрения Боба? Хотя он обладает второй частицей, но в нашем рассмотрении его роль будет пассивна – он должен просто фиксировать определённую физическую реальность. На рис. 15 изображён световой конус будущего по отношению к событию эксперимента Алисы, а также мировые линии Алисы, Боба и ещё одного наблюдателя – Чарльза. Предполагаем, что они неподвижны друг относительно друга. Пусть Боб знает о времени проведения эксперимента из предварительного общения с Алисой. Если он доверяет этой информации и будет строить оценку ситуации на её основе, то на участке своей мировой линии после точки **1** Боб уверен, что эксперимент уже осуществлён и Алиса знает его результат. Однако информация об этом результате содержится внутри светового конуса и абсолютно недоступна для Боба. Это обстоятельство имеет принципиальное значение. Действительно, разрушение суперпозиции (38) с выбором одного из её слагаемых есть прямое следствие (и фактически тождественно) получению Алисой информации об исходе эксперимента. Коль скоро эта информация недоступна для Боба (можно сказать, что с его точки зрения её просто нет), суперпозиционность квантового состояния по отношению к Бобу разрушиться не может. Происходит иное – суперпозиция теперь включает в себя состояния памяти Алисы, скоррелированные с соответствующими слагаемыми исходного суперпозиционного состояния пары частиц:

$$|\Psi^{(pre)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\mathbf{n}\rangle \otimes |-\mathbf{n}\rangle - |-\mathbf{n}\rangle \otimes |\mathbf{n}\rangle\Big) \otimes |Alice\rangle \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\mathbf{n}\rangle \otimes |-\mathbf{n}\rangle \otimes |Alice_+\rangle - |-\mathbf{n}\rangle \otimes |\mathbf{n}\rangle \otimes |Alice_-\rangle\Big) = \quad (39)$$

$$= |\Psi^{(post)}\rangle.$$

Здесь $|Alice\rangle$ – состояние памяти Алисы до измерения (определённое по отношению к Бобу), а $|Alice_\pm\rangle$ – состояния её памяти после фиксации исхода, т. е. после явления редукции (38), произошедшего с точки зрения Алисы. Для Боба, находящегося на интервале $\mathbf{1-2}$ своей мировой линии, когерентная суперпозиция справа от стрелки в выражении (39) есть описание реальности в части, касающейся эксперимента Алисы. Реальности, представшей Алисе в виде одной из альтернатив в правой части (38), для Боба просто нет.

Состояния $|Alice_\pm\rangle$ естественно считать взаимно ортогональными. Действительно, их в принципе можно различить на уровне конфигураций химических связей в мозге Алисы[11].

[11]Кроме того, Алиса, будучи макроскопической системой, связана со

Из ортогональности $|Alice_{\pm}\rangle$ следует, что изначально когерентная суперпозиция альтернатив $|\mathbf{n}\rangle \otimes |-\mathbf{n}\rangle$ и $|-\mathbf{n}\rangle \otimes |\mathbf{n}\rangle$, образующая синглетное состояние пары части, преобразуется после измерения (опять же по отношению к Бобу) в некогерентную смесь:

$$\hat{\varrho}^{(pre)} = |\Psi^{(pre)}\rangle\langle\Psi^{(pre)}| \longrightarrow Tr_{Alice}|\Psi^{(post)}\rangle\langle\Psi^{(post)}| =$$

$$= \frac{1}{2}|\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| \otimes |-\mathbf{n}\rangle\langle-\mathbf{n}| + \frac{1}{2}|-\mathbf{n}\rangle\langle-\mathbf{n}| \otimes |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}|. \qquad (40)$$

Видно, что причина разрушения изначальной когерентности есть следствие того, что проекция спина частиц на направление $\mathbf{n}$ стало "реальностью" для некоторой третьей системы (в данном случае Алисы и её окружения). Смесь (40) есть состояние пары частиц по отношению к Бобу до того момента, пока его мировая линия не "проткнёт" поверхность светового конуса. Это событие **2**. При этом Бобу становится известным исход измерения и в его сознании произойдёт редукция состояния $|\Psi^{(post)}\rangle$ к одному из состояний $|\mathbf{n}\rangle \otimes |-\mathbf{n}\rangle \otimes |Alice_{+}\rangle$ или $|-\mathbf{n}\rangle \otimes |\mathbf{n}\rangle \otimes |Alice_{-}\rangle$, аналогичная (38). Заметим, что состояния частиц окажутся по отношению к Бобу чистыми, т. е. проекции вдоль $\mathbf{n}$ спинов частиц станут для Боба "реальностью" в понимании ЭПР.

своим окружением многочисленными коммуникационными каналами. По этим каналам информация об исходе измерения распространяется и оказывается записанной в других системах. Сама поверхность светового конуса на рис. 15 образована излучением от электронных элементов экспериментальной установки и слабыми импульсами от электрохимических процессов в мозге Алисы. Это излучение также несёт информацию об исходе измерения. Поэтому $|Alice_{\pm}\rangle$ есть по-существу состояние совокупности всех систем, куда (с точки зрения Боба) дошла информация об исходе измерения.

А какова реальность по отношению к Чарльзу? Для него при прохождении точки **3** состояние Алисы, Боба и пары частиц претерпевает преобразование

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\mathbf{n}\rangle\otimes|-\mathbf{n}\rangle\otimes|Alice_+\rangle-|-\mathbf{n}\rangle\otimes|\mathbf{n}\rangle\otimes|Alice_-\rangle\Big)\otimes|Bob\rangle \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\mathbf{n}\rangle\otimes|-\mathbf{n}\rangle\otimes|Alice_+\rangle\otimes|Bob_+\rangle-$$

$$-|-\mathbf{n}\rangle\otimes|\mathbf{n}\rangle\otimes|Alice_-\rangle\otimes|Bob_-\rangle\Big)$$

Ситуация полностью аналогична (39), только теперь место Алисы занял Боб с состояниями своей памяти, зафиксировавшими альтернативные варианты редукции. С точки зрения Чарльза Боб просто пополнил то множество систем внутри светового конуса, в которых к данному моменту (по отношению к Чарльзу) записана информация об исходе измерения. Но такая же судьба ожидает и самого Чарльза после попадания внутрь светового конуса – для него произойдёт редукция, а с точки зрения наблюдателя вне конуса Чарльз в разных вариантах своей памяти будет представлен сомножителями в суперпозиции альтернативных реальностей, отвечающих разным исходам измерения.

Может показаться, что для наблюдателя в каждой точке пространства-времени по критерию её принадлежности к внутренности или внешности светового конуса следует сопоставить то или иное состояние системы (пара частиц + память Алисы), т. е. построить нечто вроде поля состояний. Это неверно, так как состояние по отношению к наблюдателю зависит не только от его положения, но и от движения. Действительно, пусть некий наблюдатель Дэвид движется в

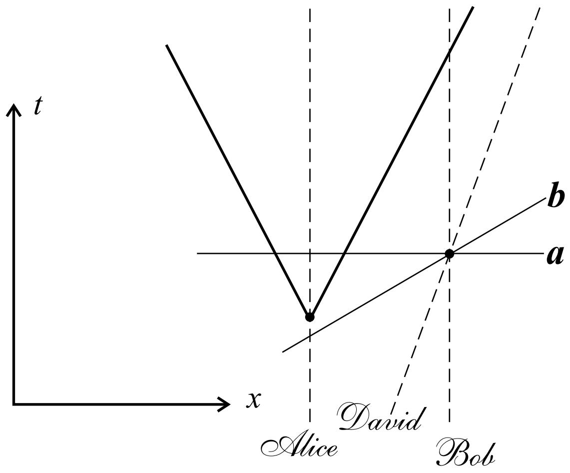

Рис. 16: Гиперплоскость a – множество одновременных событий по отношению к Бобу, b – одновременные события по отношению к Дэвиду.

положительном направлении оси x. Его мировая линия представлена на новой версии прежней схемы на рис. 16. Дэвид встречается с Бобом в некоторой точке. Для Боба Алиса уже произвела измерение, и состояние частиц есть некогерентная смесь (40), тогда как для Дэвида измерение ещё не произошло и частицы находятся в когерентной суперпозиции. Ни Боб, ни Дэвид не являются более правыми в своей оценке ситуации. Таково ещё одно проявление реляционного характера квантового состояния и физической реальности.

Необходимо также ещё раз подчеркнуть, что реальность по отношению к Бобу на интервале $\mathbf{1-2}$ его мировой линии не является ни в коей мере более бедной или грубой по сравнению с реальностью, представленной Алисе. Неверно было бы анализировать знание Боба на этом интервале как неполное на том основании, что в его памяти не отражён исход измерения. Редукция, которая ожидает Боба, и на входе и на выходе имеет чистые квантовые состояния, отвечающие исчерпывающему знанию. Поэтому редукция не *уточняет* знание Боба, а *меняет* его. Соответствующим образом меняется реальность, воспринимаемая Бобом. Данное утверждение можно проиллюстрировать ситуацией, когда вместо Алисы в измерении участвует некоторая *микроскопическая система* с тем же именем, например ещё одна частица. Это "измерение" есть фактически взаимодействие между частицами и уже не сопровождается испусканием квантов, несущих информацию об исходе измерения и образующих поверхность светового конуса на рис. 15. Поэтому Боб попадает внутрь светового конуса, не претерпев явления редукции в своём сознании. Зато он имеет возможность осуществить эксперимент над трёхчастичной системой. Если Боб задумает провести измерение некой наблюдаемой, чьи собственные состояния есть

$$|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\mathbf{n}\rangle \otimes |-\mathbf{n}\rangle \otimes |Alice_+\rangle - |-\mathbf{n}\rangle \otimes |\mathbf{n}\rangle \otimes |Alice_-\rangle\Big),$$

совпадающее с $|\Psi^{(post)}\rangle$, и

$$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\mathbf{n}\rangle \otimes |-\mathbf{n}\rangle \otimes |Alice_+\rangle + |-\mathbf{n}\rangle \otimes |\mathbf{n}\rangle \otimes |Alice_-\rangle\Big),$$

он, естественно, получит результат, соответствующий $|\Psi_-\rangle$. Таков для него элемент физической реальности, согласно ЭПР. А если Боб проведёт измерение в базисе состояний $|\mathbf{n}\rangle \otimes |--\mathbf{n}\rangle \otimes |Alice_+\rangle$ и $|-\mathbf{n}\rangle \otimes |\mathbf{n}\rangle \otimes |Alice_-\rangle$, он фактически воспроизведёт обсуждавшееся ранее явление редукции.

Когда Алиса является макроскопической системой, у Боба нет экспериментальных возможностей осуществить измерение в базисе $\{|\Psi_+\rangle, |\Psi_-\rangle\}$, так как для этого необходимо уметь согласованно менять состояния многих частиц организма Алисы и всех тех систем, которые оказались скоррелированы с Алисой (т. е. в состоянии которых записан исход измерения проекции спина первой частицы). Базис $\{|\mathbf{n}\rangle\otimes|-\mathbf{n}\rangle\otimes|Alice_+\rangle,\ |-\mathbf{n}\rangle\otimes|\mathbf{n}\rangle\otimes|Alice_-\rangle\}$ и соответствующая ему редукция "навязываются" Бобу макроскопической природой Алисы. В процессе развития экспериментальных технологий уже удаётся создавать и *исследовать* суперпозиционные неклассические состояния систем, содержащих более 10^8 частиц (например, в бозе-конденсате). Неизвестно, существует ли принципиальный запрет на операции такого рода с живыми организмами – носителями сознания.

Список рекомендуемой литературы

1. *Гейзенберг В.* Физика и философия. Часть и Целое. М.: Наука, 1989. 400 с.

2. *Einstein A., Podolsky B. and Rosen N.* Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? // Phys. Rev. 1935. V.47. P.777.

3. *Bell J. S.* On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox // Physics 1964. V.1. P.195 (переиздано в Bell J. S. *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* Cambridge: Cambridge U.P., 1987).

4. *Everett H.* Relative State Formulation of Quantum Mechanics // Rev. Mod. Phys. 1957. V.29. P.454.

5. *Менский М. Б.* Концепция сознания в контексте квантовой механики // УФН. 2005. Т.175. С.413.

6. *Белинский А.В., Клышко Д.Н.* Интерференция света и теорема Белла // УФН. 1993. Т.163. С.1.

Список используемых сокращений

КМ – квантовая механика,
NS – Non-Signalling,
LC – Local Casualty,
GHZ – Greenberge, Horne, Zeilinger,
ЭПР – Эйнштейн, Подольский, Розен,
EPR – Element of Physical Reality