Коллапс БЭК. Взаимодействие конденсатных и надконденсатных частиц

Е.А. Кузнецов[1,3], С.Б. Медведев[2,3], Ю.В. Лиханова[2,3], Я.А. Харьков[3]

[1]Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
[2]Институт вычислительных технологий СО РАН,
[3]Новосибирский государственный университет

Предложен новый механизм в рамках приближения ГП, не содержащий дополнительной газовой малости. Он связан с рождением надконденсатных частиц в результате разрушения когерентности коллапсирующего конденсата. Показано, что рождение надконденсатных частиц в рамках приближения ГП, подчеркнем - квантовой задачи, при малой плотности надконденсатных частиц сводится к линейной задаче для нормального и аномального корреляторов. Эти корреляторы в виду неоднородного коллапсирующего фона зависят как от времени, так и от двух координат $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, а не от их разности в случае однородного фона. Важно, что при этом обмен между конденсатными и надконденсатными частицами возможен только благодаря ненулевому аномальному коррелятору. При этом именно аномальный коррелятор является отражением того, что происходит разрушение когерентности конденсата. При малой плотности надконденсатных частиц линейные уравнения для корреляторов допускают разделение переменных, при этом полученные уравнения совпадают с линеаризованным уравнениям ГП - линеаризованным на фоне коллапсирующего решения. Таким образом, вопрос о генерации надконденсатных частиц - квантовая задача - сводится к задаче о линейной устойчивости коллапса, описываемого в рамках классического уравнения ГП.

Возьмем НУШ с притяжением

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{x}}^2\psi+|\psi|^2\psi=0. \qquad (1)$$

Мы считаем, что система находится в стадии коллапса, когда влиянием потенциала ловушки можно пренебречь. Сделаем замену

$$\tau=-\ln\left[\frac{t_0-t}{t_0}\right], \quad \mathbf{x}=(t_0-t)^{\frac{1}{2}}\mathbf{y}, \quad \psi=\frac{1}{(t_0-t)^{\frac{1}{2}+i\alpha}}w(y,\tau). \qquad (2)$$

и получаем модифицированное нелинейной уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial w}{\partial\tau}+i\left[\frac{1}{2}(\mathbf{y}\cdot\nabla_{\mathbf{y}}w)+\left(\frac{1}{2}+i\alpha\right)w\right]+\frac{1}{2}\Delta_{\mathbf{y}}w+|w|^2w=0. \qquad (3)$$

Если еще сделать замену

$$w(\mathbf{y},\tau) = \varphi(\mathbf{y},\tau)\, e^{-i\alpha\tau}, \tag{4}$$

то исключается член с α и уравнение принимает вид

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + i\left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{y}\cdot\nabla_{\mathbf{y}}\varphi\right) + \underline{\frac{1}{2}\varphi}\right] + \frac{1}{2}\Delta_{\mathbf{y}}\varphi + |\varphi|^2\,\varphi = 0. \tag{5}$$

Таким образом, α является собственным значением для стационарной задачи в "новых" автомодельных переменных.

Можно также переписать

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + i\left[\frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{y}}\cdot(\varphi\mathbf{y}) - \varphi\right] + \frac{1}{2}\Delta_{\mathbf{y}}\varphi + |\varphi|^2\varphi = 0. \tag{6}$$

Действие для уравнения (5)

$$S = \frac{1}{2}\int\left\{\int\left\{(i\varphi^*\varphi_\tau - i\varphi\varphi_\tau^*) + \frac{1}{2}\left[i\varphi^*\mathbf{y}\cdot\nabla_{\mathbf{y}}\varphi - i\varphi\mathbf{y}\cdot\nabla_{\mathbf{y}}\varphi^*\right]\right\}d\mathbf{y} - \right. \tag{7}$$
$$\left. - \int\left(|\nabla_{\mathbf{y}}\varphi|^2 - |\varphi|^4\right)d\mathbf{y}\right\}e^{-\frac{\tau}{2}}\,d\tau\,t_0^{\frac{1}{2}}$$

Формально есть аналогия для решений уравнений (1) и (5). Оба уравнения допускают решения с разделяющимися переменными и экспоненциальной зависимостью от времени t или τ, соответственно. Однако для стационарных решений число частиц конечно, а для автомодельного решения число частиц бесконечно.

Кроме того подстановка в действие S анзатца в виде решения с разделяющимися переменными

$$\psi(t, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) e^{i\lambda t}, \tag{8}$$

где λ вещественный параметр, дает хорошо известную вариационную формулировку.

Для автомодельного решения все сложнее, поскольку в действие присутствует весовой множитель зависящий от τ. Подчеркнутый член в (5) возникает из-за весового множителя при варьировании производной по τ и из градиентного члена.

Кроме того, если искать стационарное решение уравнения (5)

$$\varphi(\tau, \mathbf{y}) = \chi(\mathbf{y})\, e^{i\alpha\tau}, \tag{9}$$

где α вещественный параметр.

Можно показать, что автомодельные решения $\chi(\mathbf{y})$ не могут иметь конечные значения для интегралов: числа частиц и гамильтониана. Действительно, для числа частиц имеем соотношение в исходных и автомодельных переменных

$$N[\psi] = \int |\psi|^2 \, d\mathbf{x} = e^{-\frac{\tau}{2}} \, t_0^{\frac{1}{2}} \int |\varphi|^2 \, d\mathbf{y}. \tag{10}$$

Для гамильтониана ситуация аналогичная и имеем соотношение в исходных и автомодельных переменных

$$H[\psi] = \frac{1}{2} \int \left[|\nabla_{\mathbf{x}} \psi|^2 - |\psi|^4 \right] \, d\mathbf{x} = e^{\frac{\tau}{2}} \, t_0^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \int \left[|\nabla_{\mathbf{y}} \varphi|^2 - |\varphi|^4 \right] \, d\mathbf{y}. \tag{11}$$

Однако гамильтониан не знакоопределен и может равняться нулю для ненулевых решений. Поэтому возможны автомодельные решения либо с нулевым либо бесконечным гамильтонианом.

Исследуем устойчивость сферического автомодельного решения $\chi(\xi)$ ($\xi = |\mathbf{y}|$), которое определяется из уравнения

$$i\left[\left(\frac{1}{2} + i\alpha\right)\chi + \frac{1}{2}\xi\frac{d\chi}{d\xi}\right] + \frac{1}{2}\frac{d^2\chi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\chi}{d\xi} + |\chi|^2\chi = 0. \qquad (12)$$

Будем решать начальную задачу с начальными данными

$$w|_{\tau=0} = \chi(\xi) + g_0(\mathbf{y}),$$

где $\chi(\xi)$ решение стационарной задачи для подходящего α и $g_0(\mathbf{y})$ - начальное возмущение.

Функцию возмущений $g(\mathbf{y})$ можно факторизовать

$$g = u(\xi, \tau)P_l(\cos\theta),$$

где P_l - полином Лежандра порядка l. Такие функции $P_l(\cos\theta)$ называются зональными, потому что есть только зависимость от угла θ.

Уравнение на функцию $u(\xi,\tau)$ принимает вид

$$i\frac{\partial u}{\partial \tau} + i\left[\frac{1}{2}\xi\frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(\frac{1}{2} + i\alpha\right)u\right] + \frac{1}{2}\Delta_l u + 2\left|\chi\right|^2 u + \chi^2 u^* = 0, \qquad (13)$$

где

$$\Delta_l u = \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \frac{l(l+1)}{\xi^2}u. \qquad (14)$$

Начальные данные брались в виде

$$u_{0l}(\xi) = C\xi^l \exp\left\{-\frac{\xi^2}{\xi_0^2}\right\}, \qquad (15)$$

где l номер полинома Лежандра.

Продифференцируем (12) по ξ

$$\frac{i}{2}\chi'+i\left[\left(\frac{1}{2}+i\alpha\right)\chi'+\frac{1}{2}\xi\frac{d\chi'}{d\xi}\right]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\chi'}{d\xi}-\frac{2}{\xi^2}\chi'\right)+2\left|\chi\right|^2\chi'+\chi^2\chi'^* \tag{16}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (13) для $u(\tau,\xi)$, видим, что функция

$$u_1(\tau,\xi)=e^{\tau/2}\chi'(\xi) \tag{17}$$

является собственной модой линеаризованного уравнения (13) для $l=1$. Эта мода существует и неустойчива в автомодельных переменных. Численный счет выходит на эту моду.

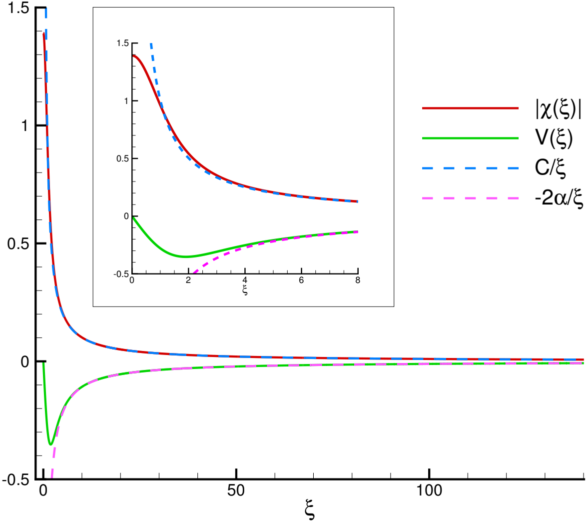


Рис.: Plots of $|\chi(\xi)|$, $V(\xi)$ and their asymptotes

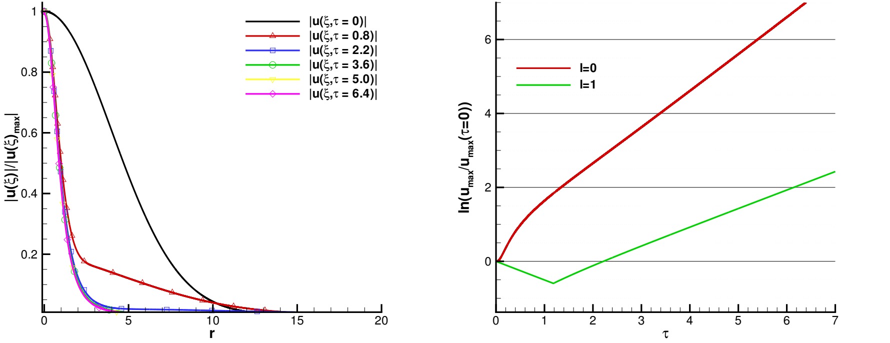
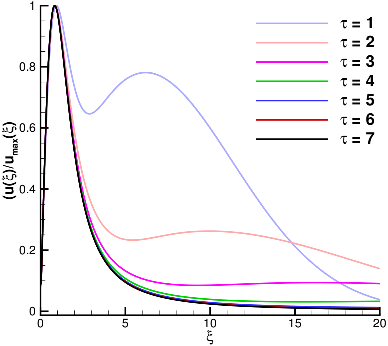


Рис.: Plots of the mode behavior normalized to the maximum amplitude at each time value τ for $l = 0$ (left) and the increment behavior depending on τ for $l = 0$ and $l = 1$ (right)



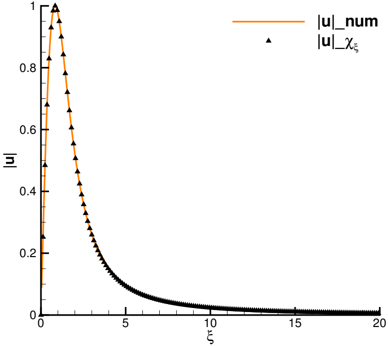


Рис.: Plots of the mode behavior normalized to the maximum amplitude at each time value τ for $l = 1$ (left) and comparison of the found numerical mode for $l = 1$ with the mode obtained by differentiating the solution χ of (29) relative to ξ under the normalization

Численно продемонстрировано, что линейная задача об устойчивости слабого коллапса дает неустойчивость для моды с орбитальным моментом $l = 0$. Ее инкремент $\gamma = 0.984984$, т.е. возмущение растет пропорционально $(t_0 - t)^{-1/2-\gamma}$. Значение γ находилось при решении временной задачи для логарифмического «времени» $\tau = -ln(1 - t/t_0)$. При больших значениях τ возмущение асимптотически стремилось к собственной моде.

Имеется также другая неустойчивая мода с $l = 1$, которая получается из сдвиговой моды решения для слабого коллапса. Однако мода с $l = 1$, как сдвиговая, не имеет физического смысла. Более того, инкремент этой моды приблизительно в два раза меньше инкремента для $l = 0$. Для всех мод с $l > 1$ численное интегрирование линейной задачи дает устойчивость. Таким образом, нами показано, что режим слабого коллапса является неустойчивым относительно возмущений с $l = 0$.

Тем самым нами решены две важные проблемы: доказано неустойчивость слабого коллапса – одна из давно сформулированных задач в теории волнового коллапса, а также показано, что генерация надконденсатных частиц обязана новому механизму за счет разрушения когерентности коллапсирующего конденсата. Однако этот механизм работает не при очень больших плотностях, когда приближение Гросса-Питаевского все еще остается справедливым. При больших плотностях БЭК существенным оказывается механизм, предложенный Каганом с соавторами.