

Динамика перезамыкающихся вихревых нитей в квантовых жидкостях

Институт Теплофизики СО РАН

Немировский С.К.
e-mail: nemir@itp.nsc.ru

Андрющенко В.А.
e-mail: vladimir.andryushchenko@gmail.com

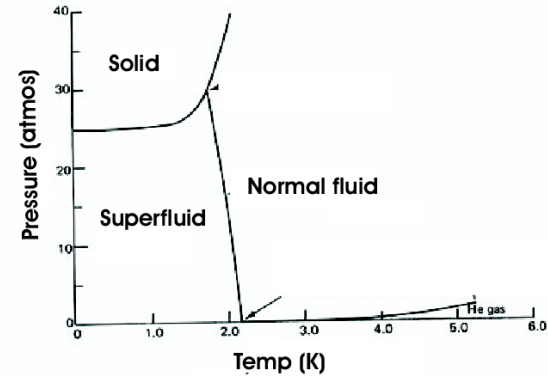
Кондаурова Л.П.
e-mail: louisa@ngs.ru

План доклада:

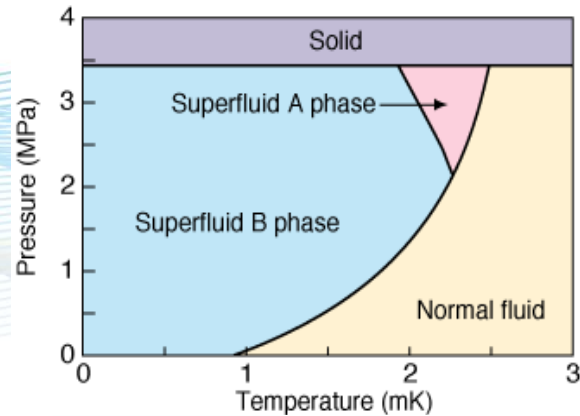
- Вихри в квантовых жидкостях (HeII vs BEC)
- Динамика реконnectирующих вихревых петель
- Энергетический спектр реконnectирующих петель
- Вихревые клубки и квантовая турбулентность

Квантовые жидкости

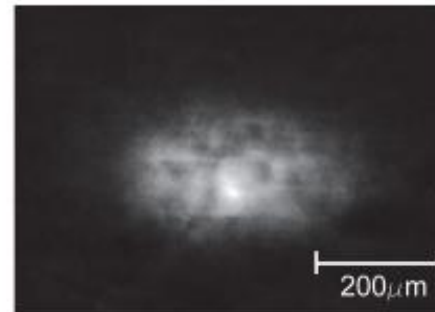
Жидкий ^4He ниже 2.2 K



Жидкий ^3He ниже 2 mK



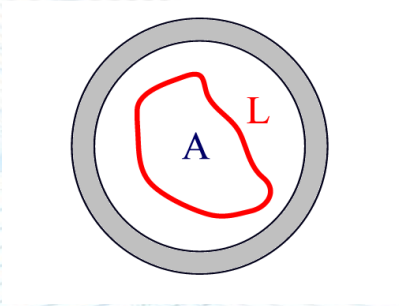
Ультрахолодные квантовые газы, ВЕС в щелочных металлах (^{87}Rb , ^{23}Na , ^7Li , ...)



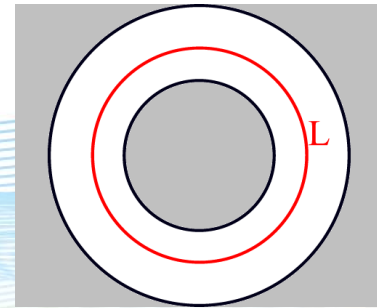
Квантованные вихри в сверхтекучих жидкостях

Циркуляция в односвязной и многосвязной областях

$$\Gamma = \oint_L v_s d\ell = 0$$



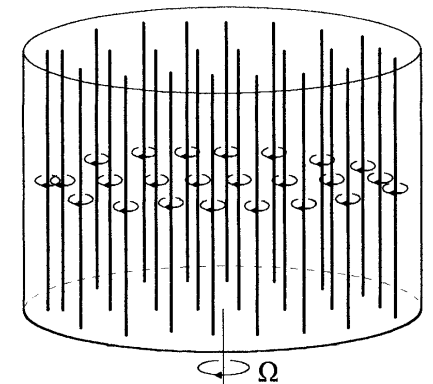
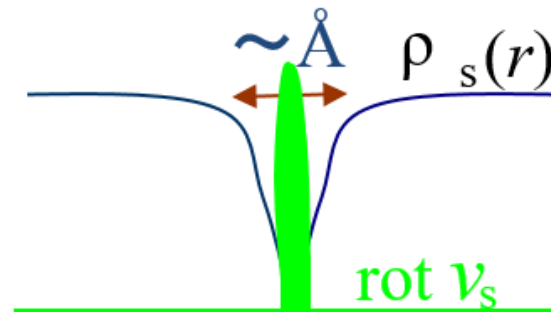
$$\Gamma = \oint_L v_s d\ell = n \frac{h}{m_4} = n\kappa$$



$$\kappa = 2\pi\hbar / m$$

$$\kappa = 9.97 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s}$$

- Все вихри имеют одинаковую циркуляцию
- Вихри стабильны
- Размер ядер вихрей порядка межатомных расстояний



Динамика квантованных вихревых нитей при конечной температуре

Динамика вихревых нитей может быть определена методом вихревой нити с использованием уравнения Био-Савара:

$$\mathbf{V}_B(\mathbf{s}) = \frac{\kappa}{4\pi} \oint_L \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3}$$

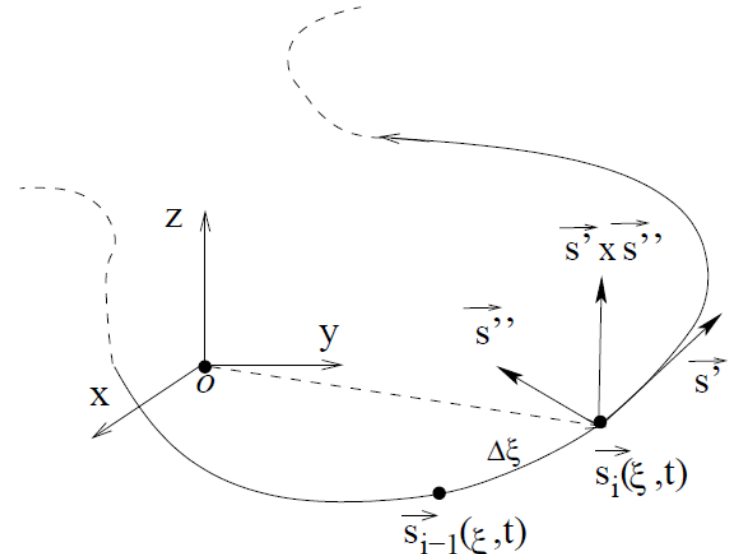
$\mathbf{V}_B(\mathbf{s})$ – скорость точек вихревой нити, определенная по уравнению Био-Савара

$\kappa = h/m_{He}$ – квант циркуляции

h – постоянная Планка

m_{He} – масса атома гелия

\mathbf{s}, \mathbf{s}_1 – радиус-векторы точек на вихревой нити



В отсутствии противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия, но при учете силы трения, уравнение движения вихревой нити принимает следующий вид:

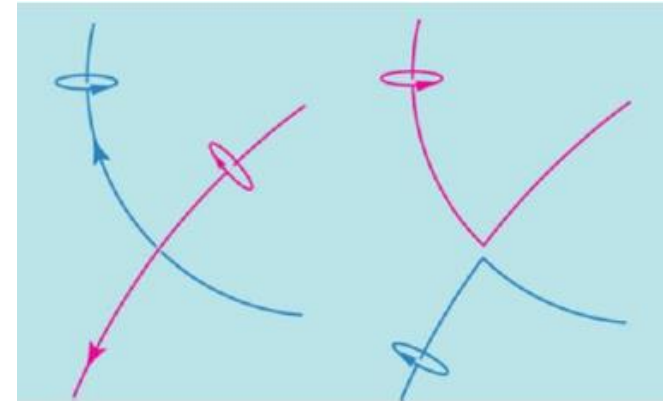
$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_B - \alpha \mathbf{s}' \times \mathbf{V}_B + \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times \mathbf{V}_B]$$

\mathbf{V}_L – скорость точек вихревой нити

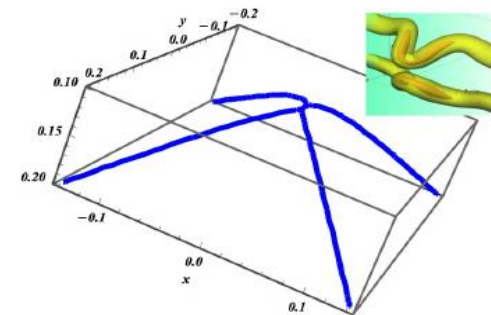
α, α' – коэффициенты трения

Динамика вихрей, реконнекции

Схематическое изображение реконнекции вихревых нитей. C.F. Barenghi. Quantum Fluids and Vortices. School of Mathematics and Statistics Newcastle University, 2009.

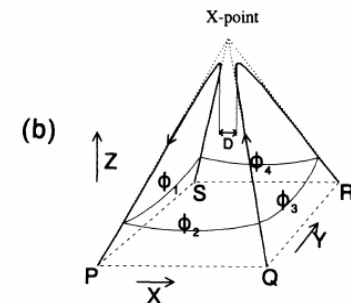
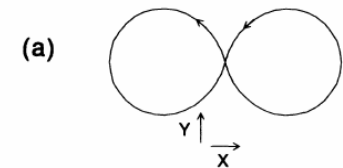


Реконнектирующие вихревые нити в классических жидкостях: E.D. Siggia. Collapse and amplification of a vortex filament // Phys. Fluids, 28:794, 1985.



$$\delta(t) = \sqrt{(\kappa/2\pi) |t_* - t|}$$

A.DeWaele, R. Aarts. Route to vortex reconnection // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 72, №4. P. 482-485.



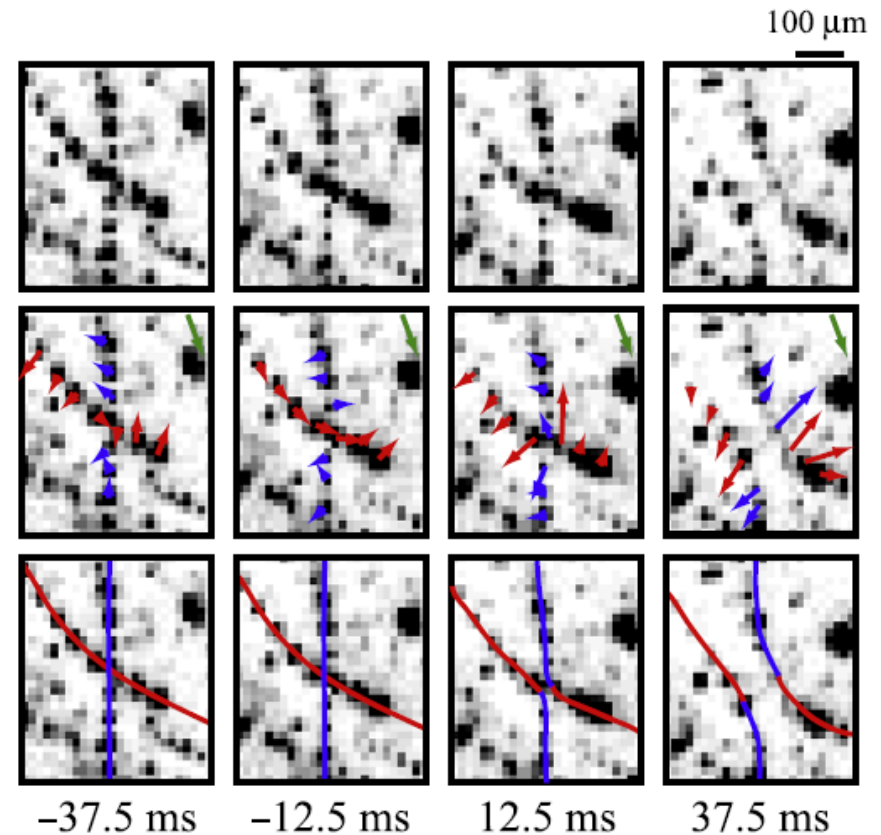
Реконнекции квантованных вихрей в сверхтекучем He

M.S. Paoletti, M.E. Fisher,
D.P. Lathrop. Reconnection dynamics
for quantized vortices. Phys.D.:
Non.Phen. 239, 14 (2010)

$$1.7 < T < 2.05$$

$$\delta(t) = A\sqrt{\kappa|t_* - t|} (1 + c|t_* - t|)$$

$$A \sim 1.25, c \sim 0.5s^{-1}$$



Динамика ВЕС, уравнение Гросс-Питаевского

$$\frac{\hbar}{m} \frac{\partial \psi}{\partial t} = - (\Lambda + i) \frac{\delta H(\psi)}{\delta \psi^*}$$

$$H\{\psi\} = \int d^3\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi|^2 - \mu |\psi|^2 + \frac{U_0}{2} |\psi|^4 \right]$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)/m} \exp(i\phi(\mathbf{r}, t))$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = m|\psi|^2, \quad \mathbf{v} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi.$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + \mathbf{v}_k \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial r_k} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r_j} + \frac{\partial \Sigma_{jk}}{\partial r_k}.$$

$$p = \frac{U_0}{2m^2} \rho^2, \quad \Sigma_{jk} = \left(\frac{\hbar}{2m} \right)^2 \rho \frac{\partial \ln \rho}{\partial r_j \partial r_k}, \quad c = \sqrt{\frac{U_0 n}{m}}.$$

Нуль параметра порядка (топологический дефект)

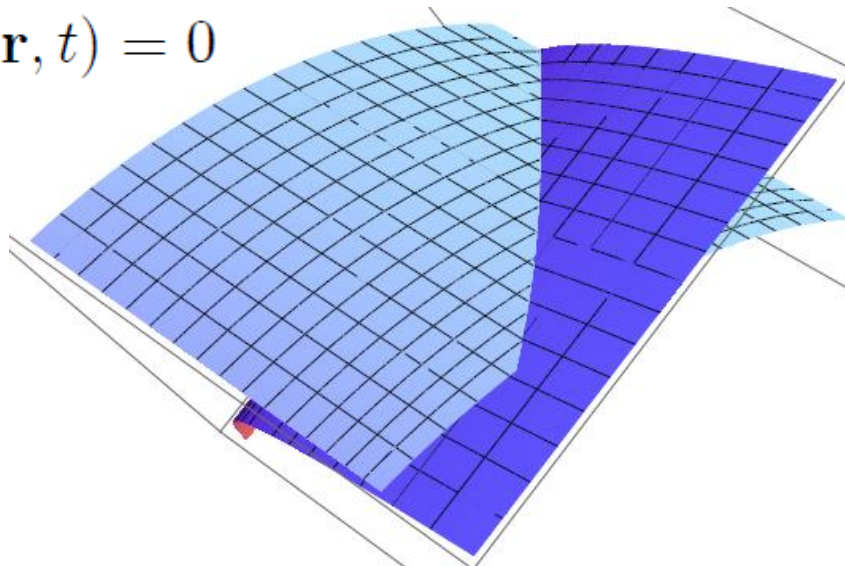
$$\psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \psi(\mathbf{r}, t) = az + \dots = a(x + iy) + \dots$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{x^2 + y^2} \exp\left(i \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) + \dots$$

$$\nabla \cdot \phi(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\hbar}{m} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\mathbf{v} = \left(0, \frac{\hbar}{m} \frac{1}{r}, 0\right), \quad \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \frac{2\pi\hbar}{m} = \kappa$$

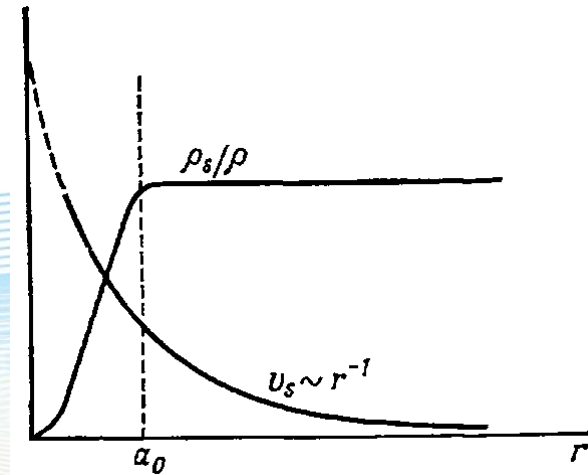
$$\text{Re } \psi(\mathbf{r}, t) = 0$$



$$\text{Im } \psi(\mathbf{r}, t) = 0$$

Связь между вихрями в HeII и ВЕС

- Для ВЕС существует микроскопическая теория
- Вихри в ВЕС – нули параметра порядка
- ВЕС допускает явное описание реконнекций
- Разный размер ядер: ВЕС~65-80nm, HeII~15nm
- HeII – несжимаем, ВЕС – сжимаем
- Уравнение движения имеют тот же вид, с разной интерпретацией коэффициентов трения



$$\psi = \sqrt{n} \exp(i\varphi) f(r/a_0),$$

$$a_0 = \hbar / \sqrt{2mnU_0},$$

Уравнение движения элемента вихревой нити

$$\frac{\hbar}{m} \frac{\partial \psi}{\partial t} = - (\Lambda + i) \frac{\delta H(\psi)}{\delta \psi^*}$$

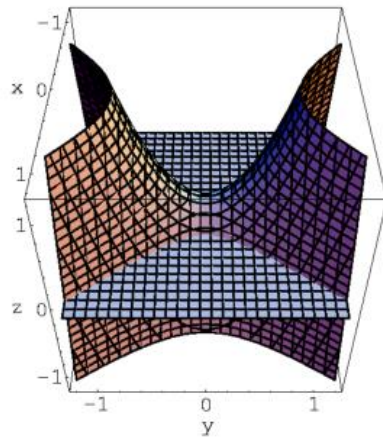
$$\dot{\mathbf{s}}(\xi_0) = \mathbf{B}(\xi_0) - \frac{(1 + \Lambda^2)\Lambda\sigma}{1 + \Lambda^2\sigma^2} \mathbf{s}'(\xi_0) \times \mathbf{s}'(\xi_0) \times \mathbf{B}(\xi_0) + \\ + \frac{(1 + \Lambda^2)\Lambda\sigma}{1 + \Lambda^2\sigma^2} \mathbf{s}'(\xi_0) \times \mathbf{B}(\xi_0)$$

$$\alpha = \frac{(1 + \Lambda^2)\Lambda\sigma}{1 + \Lambda^2\sigma^2}, \quad \alpha' = \frac{\Lambda^2(\sigma^2 - 1)}{\sigma^2\Lambda^2 + 1}.$$

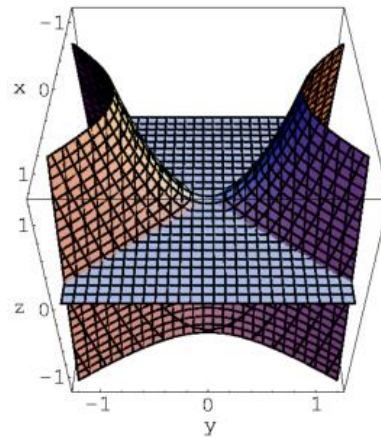
$$\mathbf{B}(\xi_0) = -\frac{\kappa}{4\pi} \int_{\Gamma'} \frac{(\mathbf{s}(\xi_0) - \mathbf{s}(\xi')) \times \mathbf{s}'(\xi)}{|\mathbf{s}(\xi_0) - \mathbf{s}(\xi')|^3} d\xi'. \quad \sigma = \ln R/a_0$$

С.К. Немировский. Динамика квантованных вихрей в слабо неидеальном Бозе-газе при конечной температуре // Физика ультрахолодных атомов, 2015.

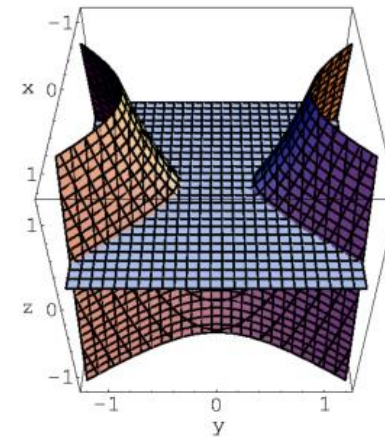
Реконнекция (изменение топологии)



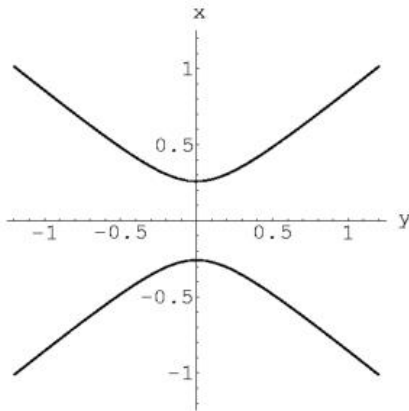
(a) $t = -0.1$



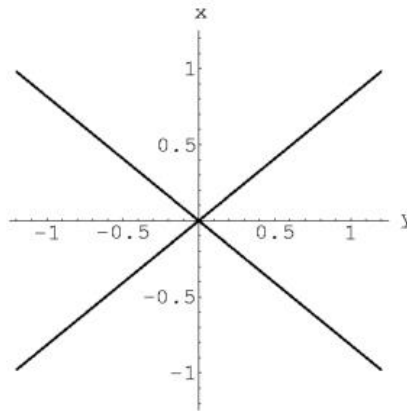
(b) $t = 0.0$



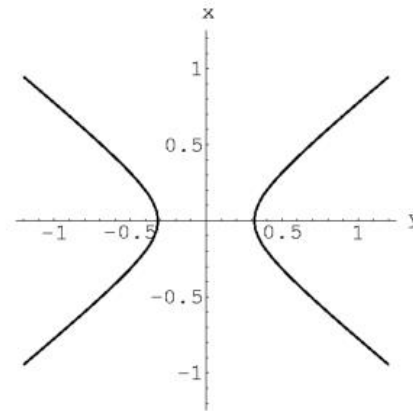
(c) $t = 0.1$



(d) $t = -0.1$



(e) $t = 0.0$



(f) $t = 0.1$

S.V. Nazarenko and R.J. West Analytical solution for nonlinear Schrodinger vortex reconnection // J. Low Temp. Phys, 132 (1-2): 1-10 JUL 2003.

Численное моделирование динамики реконнектирующих вихревых нитей при конечной температуре

Моделирование динамики вихревых нитей проводилось на основе метода вихревой нити с использованием полного уравнения Био-Савара:

$$\mathbf{V}_B(\mathbf{s}) = \frac{\kappa}{4\pi} \oint_L \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3}$$

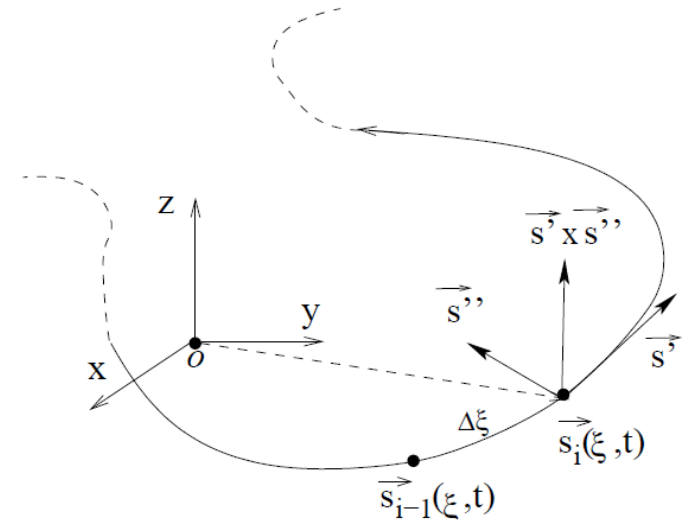
$\mathbf{V}_B(\mathbf{s})$ – скорость точек вихревой нити, определенная по уравнению Био-Савара

$\kappa = h/m_{He}$ – квант циркуляции

h – постоянная Планка

m_{He} – масса атома гелия

\mathbf{s}, \mathbf{s}_1 – радиус-векторы точек на вихревой нити



Уравнения движения вихревой нити с учетом силы трения, в отсутствии и при наличии противотока нормальной и сверхтекучей компонент гелия :

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_B - \alpha \mathbf{s}' \times \mathbf{V}_B + \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times \mathbf{V}_B]$$

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_s + \mathbf{V}_B + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{V}_{ns} - \mathbf{V}_B) - \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{V}_{ns} - \mathbf{V}_B)]$$

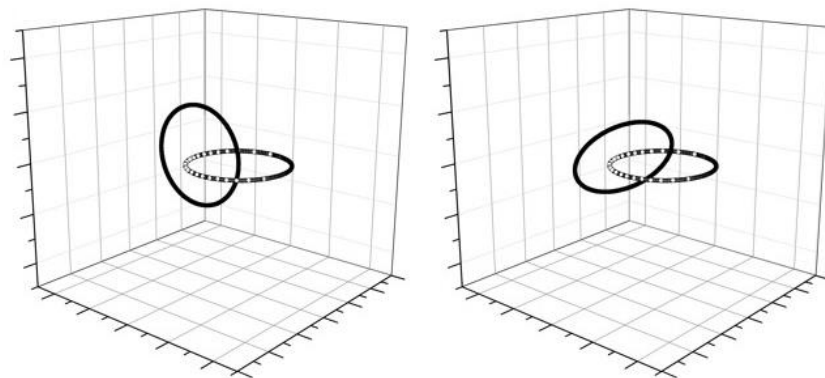
\mathbf{V}_L – скорость точек вихревой нити

α, α' – коэффициенты трения

Для интегрирования уравнения движения по времени использована схема Рунге-Кутты 4-го порядка

Параметры моделирования

В качестве начальной конфигурации системы выбирались два кольца одинакового диаметра, лежащие в плоскостях, расположенных под углами: 0, 30, 45, 60 и 90 градусов.

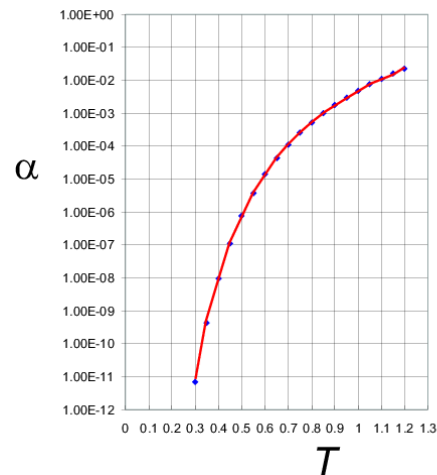


Радиусы колец R_0 варьировались от $10^{-7}m$ до $10^{-5}m$.

Начальное расстояние между центрами колец изменялось от $10^{-5}m$ до $2.5 \cdot 10^{-5}m$.

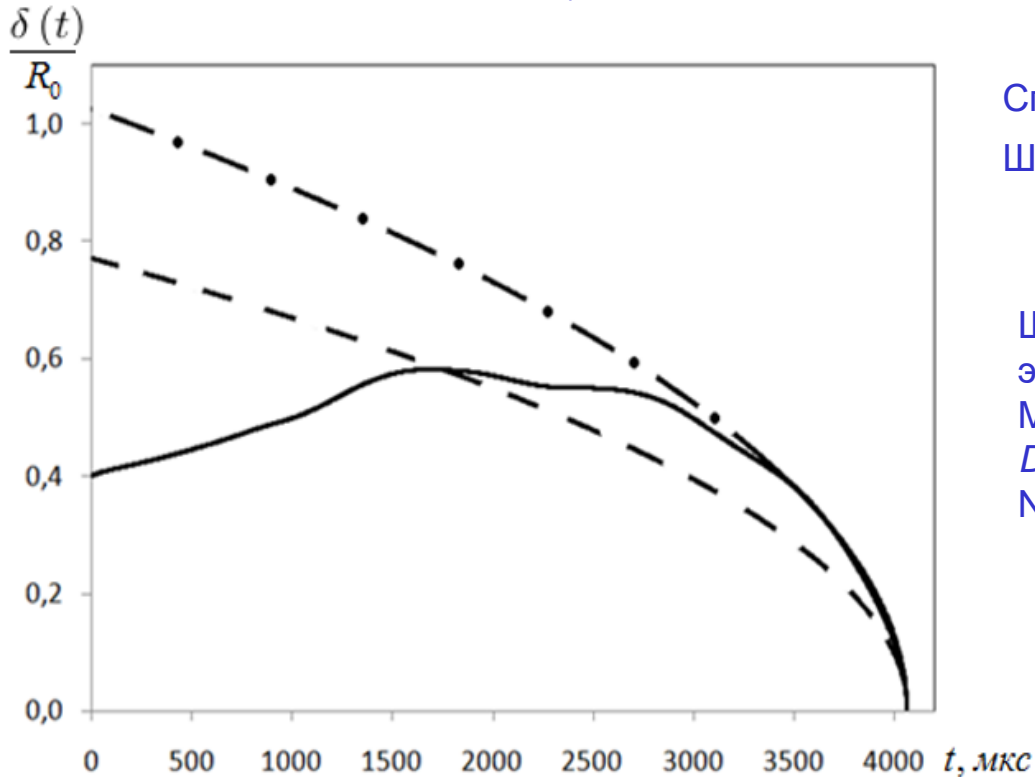
Температуры системы и соответствующие коэффициенты трения:

T, K	0	1.3	1.6	1.9
α	0	0.036	0.098	0.21
α'	0	0.014	0.016	0.0009



Пространственное разрешение — ds_0 , выбиралось в сто раз меньшим начального радиуса петель

Динамика вихревых петель перед реконнекцией



Сплошная линия – наши данные моделирования
Штриховая линия – уравнение

$$\delta(t) = \sqrt{(\kappa/2\pi) |t_* - t|} \quad (1)$$

Штрих - пунктирная линия – аппроксимация экспериментальных данных: M.S. Paoletti, M.E. Fisher, D.P. Lathrop. *Reconnection Dynamics for Quantized Vortices* // Phys.D.: Non.Phен. 2010. Vol.239, №14. P. 1367–1377.

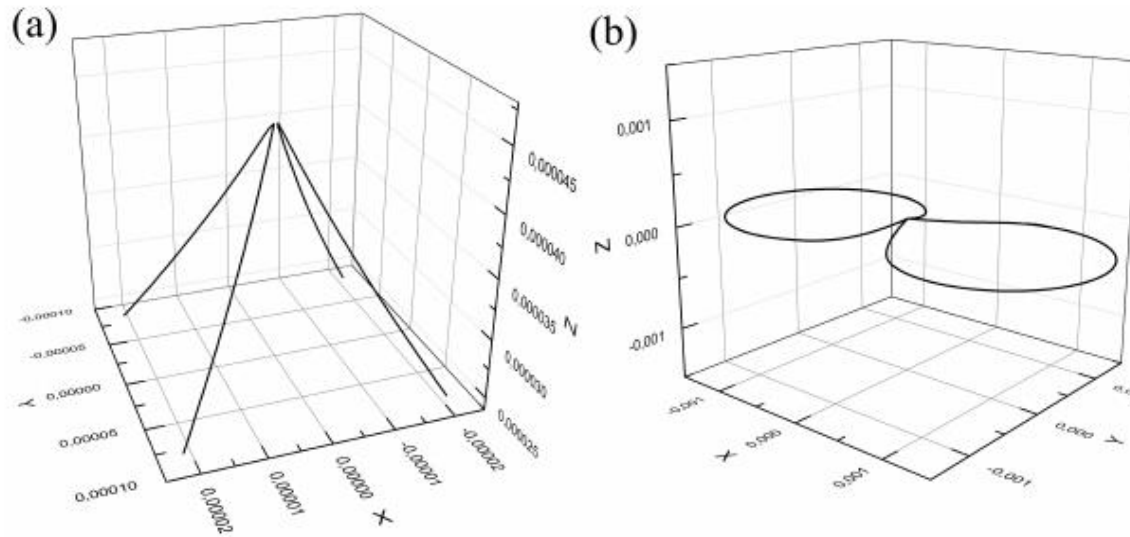
$$\delta(t) = A\sqrt{\kappa|t_* - t|} (1 + c|t_* - t|) \quad (2)$$

$$A \sim 1.25, c \sim 0.5s^{-1}$$

Динамика вихревых нитей перед реконнекцией состоит из трех этапов: неуниверсального, полу-универсального и универсального. Скорость сближения ближайших точек вихревых нитей в универсальном и полу-универсальном интервалах описывается уравнениями (1-2)

Коэффициенты A и c , а также граница между неуниверсальным и полу-универсальным интервалами зависит от начального расположения вихрей и температуры. Граница между универсальным и полу-универсальным интервалами совпадает с расстоянием фигурирующем в критерии реконнекции Шварца: (K.W. Schwarz. Phys. Rev. B. 1985. Vol. 31, №9. 054511)

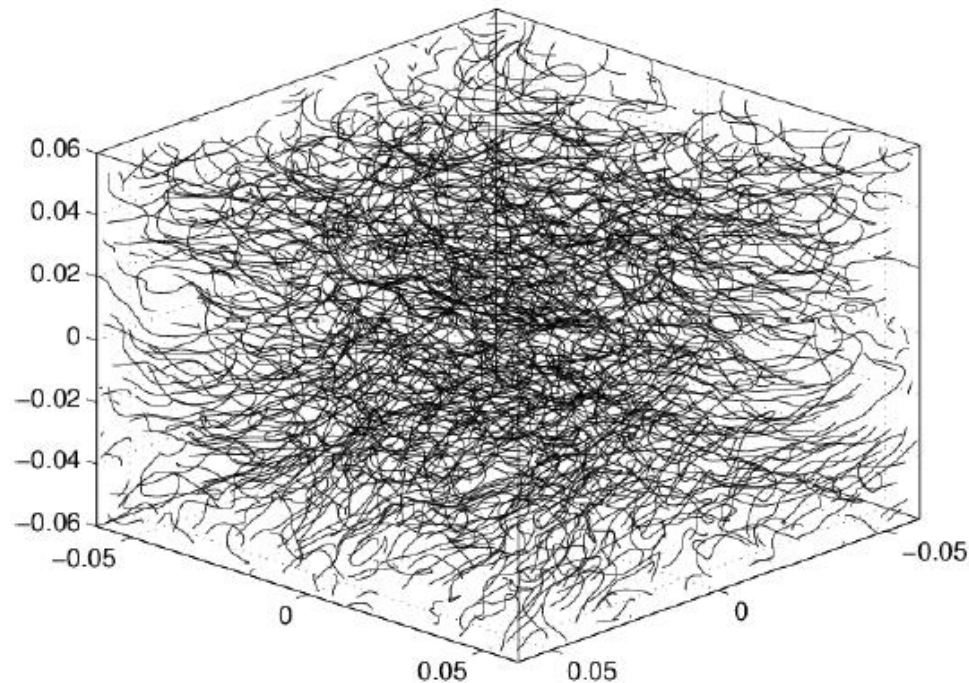
Геометрическая конфигурация вихревых петель перед реконнекцией



Углы при вершине пирамидальной структуры, образованной вихревыми петлями при их приближении, практически не зависят от начального расположения петель температуры. Такая картина хорошо согласуется (в том числе и значения углов) с результатами работы, полученными при нулевой температуре: A.DeWaele, R. Aarts. Route to vortex reconnection // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol. 72, №4. P. 482-485.

При сближении участки вихревых нитей переориентируются таким образом, чтобы вектора циркуляции при реконнекции были противоположно направлены.

Квантовая турбулентность



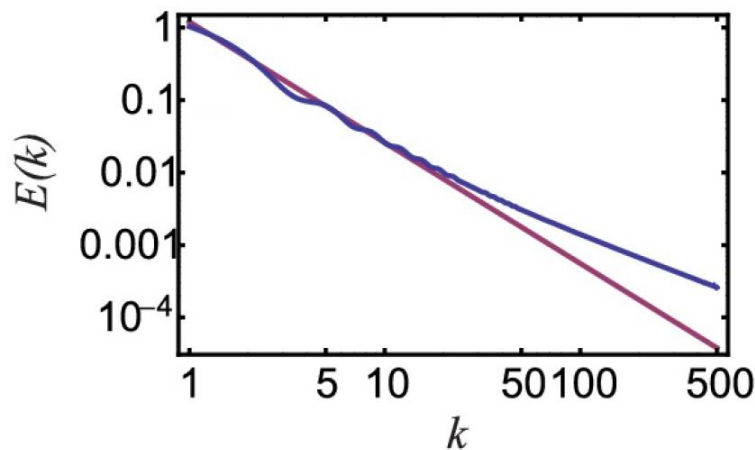
- Квантовая турбулентность – клубок запутанных вихревых нитей
- Изучение классической турбулентности через квантовую
- Каков механизм диссипации энергии в квантовой турбулентности?
- Какова роль гидродинамического коллапса в формировании спектров турбулентности?

Вычисление энергетического спектра: метод конфигураций квантовых вихрей

Постановка задачи мотивирована идеей моделирования классической турбулентности набором хаотических квантованных вихревых нитей.

Среди различных аргументов, поддерживающих идею квазиклассического поведения квантовой турбулентности, самым сильным, вероятно, является реализация колмогоровского спектра энергии типа $E(k) \sim k^{-5/3}$, полученная в ряде численных работ.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k} \left\langle \frac{1}{k^2} \frac{\rho_s \tilde{\kappa}^2}{16\pi^3} \int_0^L \int_0^L \mathbf{s}'(\xi_1) \mathbf{s}'(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 e^{i\mathbf{k}(\mathbf{s}(\xi_1) - \mathbf{s}(\xi_2))} \right\rangle$$



Прямая линия имеет наклон $-5/3$.

$$h(\xi) = \sqrt{a^2 \xi^2 / (a^2 + \xi^2) + a^2 + \xi^2}.$$

$$\mathbf{s}_{1,2}(\xi) = [\pm (h(\xi) - c), \pm \xi, (h(h(\xi) - b))].$$

S.K. Nemirovskii. Reconnection of quantized vortex filaments and the Kolmogorov spectrum // PRB 90 (10), 104506

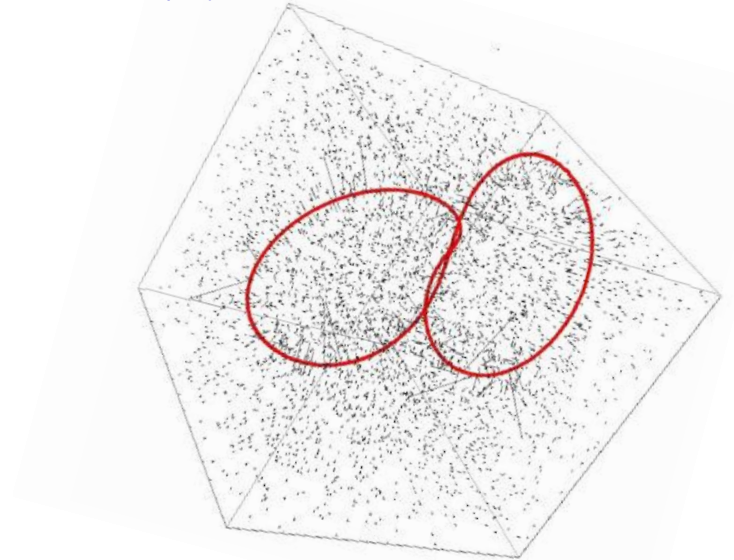
Вычисление энергетического спектра: метод корреляционных функций

$$C_{ll}(l) = \langle \delta v_{||}(l)^2 \rangle,$$

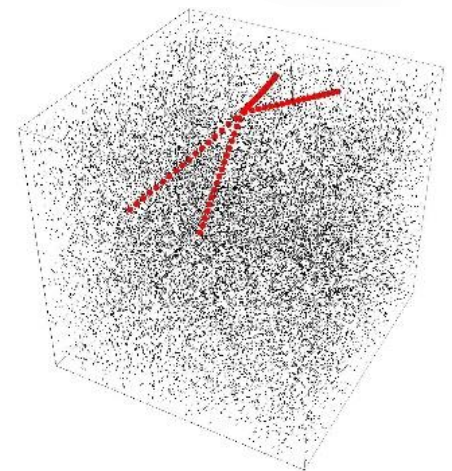
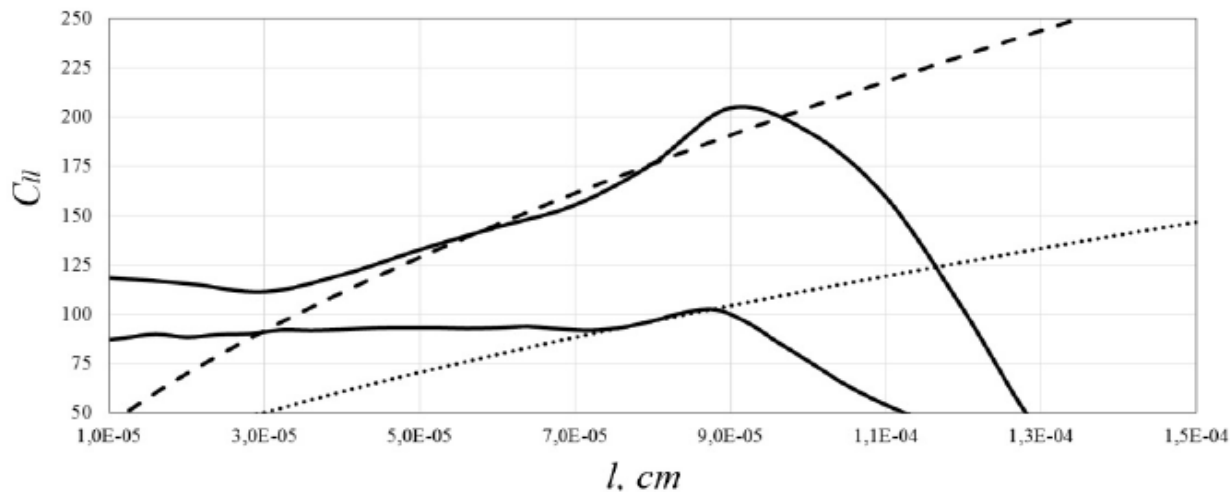
$$\delta v_{||}(l) = [\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{l}/l.$$

$$C_{ll}(l) \sim l^\alpha \quad E(k) \propto k^{-\alpha-1}$$

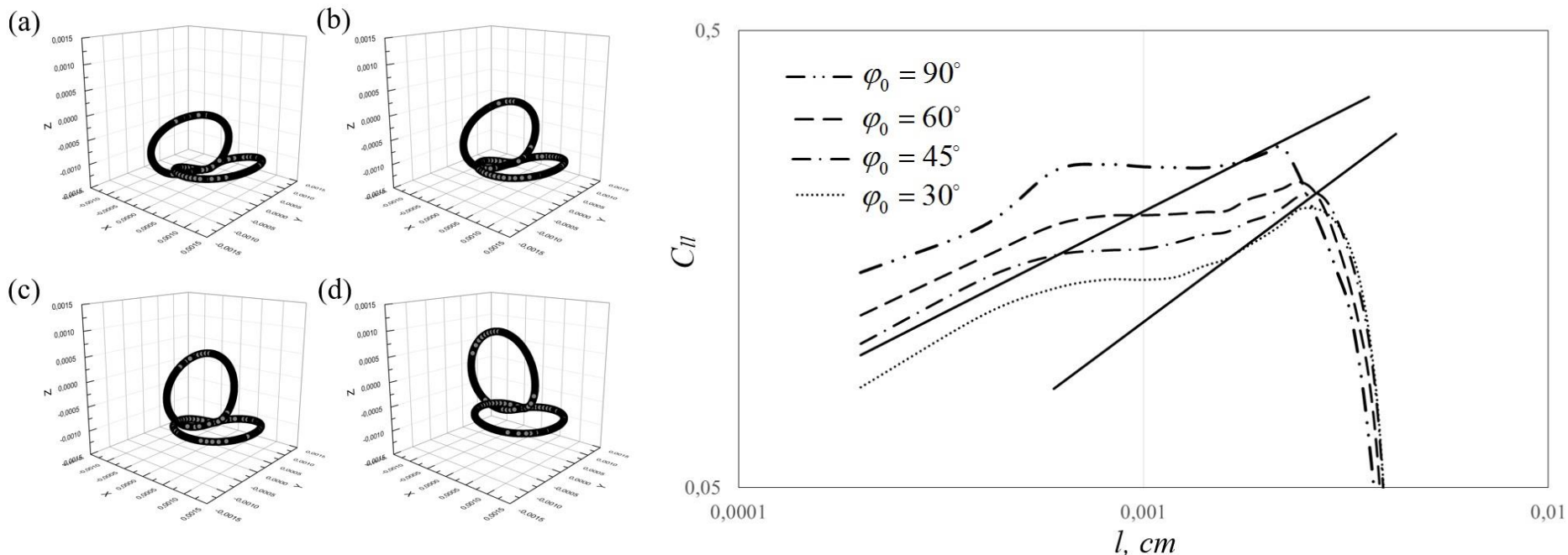
$$C_{ll}(l) \sim l^{2/3} \quad E(k) \propto k^{-5/3}$$



Для кинков (на межвихревых масштабах)



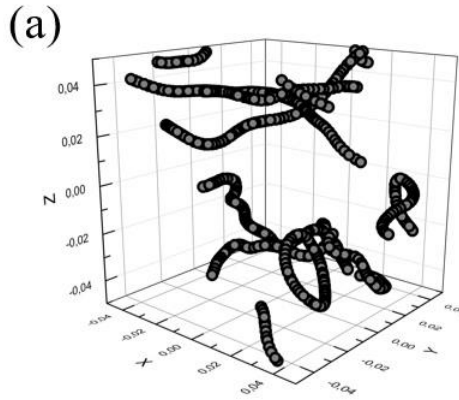
Энергетический спектр реконнектирующихся петель



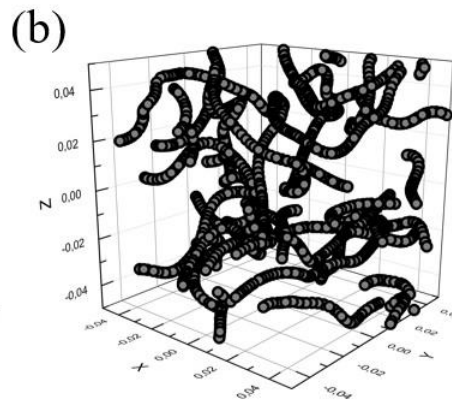
Наклон аппроксимирующих кривых увеличивается с уменьшением угла между плоскостями начального расположения петель, т.е. для более пространственно скоррелированных вихревых конфигураций.

Значения углов наклона $C_{||}$ изменяется в диапазоне от 0.45 до 0.66, что соответствует спектрам $E(k) \sim k^{-1.45}$ и $E(k) \sim k^{-5/3}$.

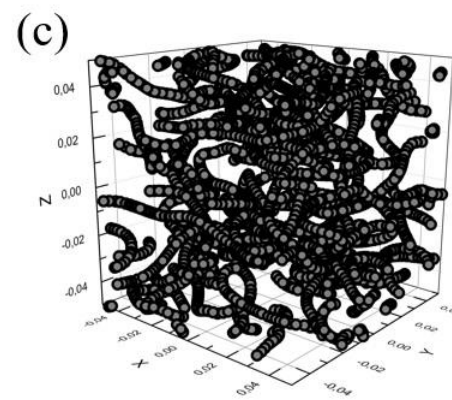
Энергетический спектр поля скорости, создаваемого вихревым клубком в противотоке



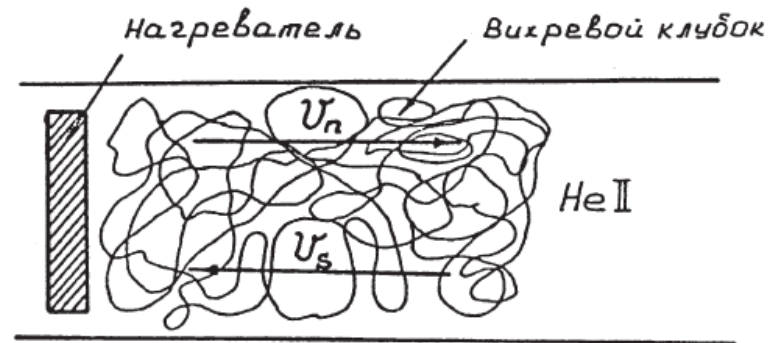
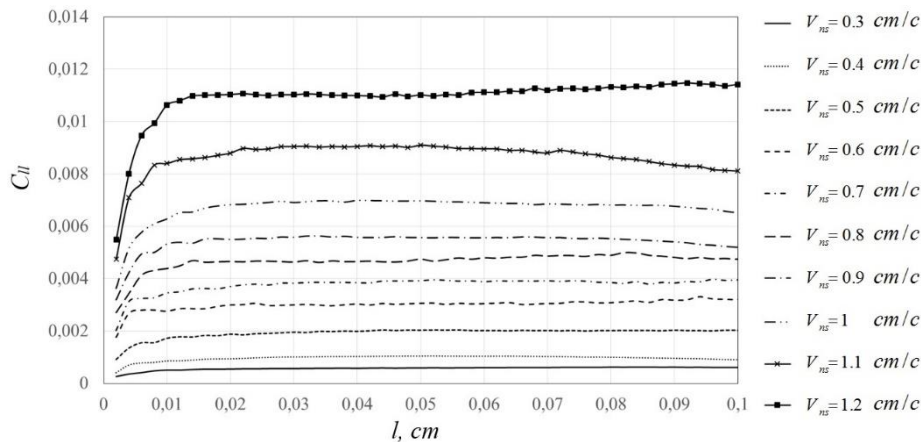
$T = 1.3 \text{ K}$



$T = 1.6 \text{ K}$



$T = 1.9 \text{ K}$



Найден спектр энергии, создаваемый вихревым клубком в противотоке нормальной и сверхтекучей компонент при различных температурах. Значения противотока изменялись в диапазоне от 0.3 см/с до 1.2 см/с, а значения температуры от 1.3 К до 1.9 К. Показано, что на межвихревых масштабах $E(k) \sim k^{-\alpha}$, где $1.3 < \alpha < 1.4$ в зависимости от температуры. На больших масштабах $E(k) \sim k^{-1}$.

Основные результаты

- Установлен характер динамики вихрей перед реконнекцией. Показано, что ближайшие участки вихревых петель, при их сближении, образуют пирамидальную структуру, независящую от температуры и начального взаимного расположения петель.
- Используя метод конфигураций квантовых вихрей и метод корреляционных функций, был получен энергетический спектр трехмерного поля скорости, индуцированного реконнектирующими вихревыми нитями. Установлено, что конфигурация вихревых нитей, образуемая ими перед реконнекцией, создает поле скорости со спектром близким к колмогоровскому спектру.
- Найден спектр энергии, создаваемый вихревым клубком в противотоке нормальной и сверхтекучей компонент при различных температурах. Показано, что на межвихревых масштабах $E(k) \sim k^{-\alpha}$, где $1.3 < \alpha < 1.4$ в зависимости от температуры. На больших масштабах $E(k) \sim k^{-1}$.