

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ» (СИБГУТИ)

На правах рукописи

Овчаренко Алёна Юрьевна

**О СВОЙСТВАХ ГРАФОВ КЭЛИ НЕКОТОРЫХ  
КОНЕЧНЫХ ГРУПП**

Специальность 05.13.17 —

«Теоретические основы информатики»

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук, профессор

Лыткина Дарья Викторовна

Новосибирск — 2018

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>Глава 1. Предварительные сведения</b> . . . . .	<b>13</b>
1.1 Основные понятия . . . . .	13
1.1.1 Графы Кэли . . . . .	13
1.1.2 Группы . . . . .	14
1.2 Обзор аналогов . . . . .	18
1.2.1 Регулярные графы . . . . .	18
1.2.2 Деревья . . . . .	20
1.2.3 Некоторые частные классы целочисленных графов . . . . .	21
1.2.4 Диаметр и средний диаметр графов Кэли . . . . .	26
<b>Глава 2. Описание предлагаемого подхода и построения схемы эксперимента</b> . . . . .	<b>28</b>
2.1 Алгоритм определения целочисленности графов Кэли . . . . .	28
2.2 Реализация алгоритма . . . . .	31
<b>Глава 3. Теоретические построения, необходимые для реализации алгоритма</b> . . . . .	<b>33</b>
3.1 Представления симметрической группы и знакопеременной группы . . . . .	33
3.1.1 Предварительные сведения . . . . .	33
3.1.2 Определяющие соотношения . . . . .	36
3.1.3 Пример графа с количеством вершин $n = 10$ . . . . .	43
3.2 Алгоритм перечисления смежных классов . . . . .	44
3.3 Алгоритм поиска ранга методом Гаусса без деления . . . . .	47
<b>Глава 4. Основные результаты</b> . . . . .	<b>53</b>
4.1 Целочисленные графы Кэли и их спектры . . . . .	53
4.2 Диаметры и средние диаметры . . . . .	59
<b>Заключение</b> . . . . .	<b>63</b>

Список литературы . . . . .	64
Список таблиц . . . . .	75
Приложение А. Исходный код программной реализации алгоритма нахождения целого спектра графа Кэли . . . . .	76
Приложение Б. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ . . . . .	83
Приложение В. Акты о внедрении результатов диссертационной работы . . . . .	84

## Введение

**Актуальность исследования.** Современные фундаментальные и прикладные исследования в огромной мере используют компьютерные вычисления, поэтому актуальной является задача увеличения мощности компьютеров. Последовательные вычисления имеют очевидные ограничения, поэтому исследователи все больше заинтересованы в архитектуре параллельных вычислительных систем. В отличие от последовательного вычисления, параллельное вычисление требует, чтобы процессоры имели возможность взаимодействовать друг с другом.

Для изучения свойств межсетевого взаимодействия можно использовать инструменты и результаты из теории графов: представим процессор узлом, а канал связи между двумя процессорами – ребром; свойства полученного графа (такие как связность и диаметр) обеспечивают непосредственную информацию о сети. Сравнение графов большого порядка (с количеством узлов, исчисляющимся тысячами) показало, что некоторые графы Кэли обладают в этом смысле очень хорошими свойствами.

*Графом Кэли*  $\Gamma = \text{Cay}(G, S) = (V, E)$  на группе  $G$  относительно порождающего множества  $S$  называется граф с множеством вершин  $V = G$  и множеством рёбер  $E = \{(g, h) \mid g, h \in G, g^{-1}h \in S\}$ . Графы Кэли являются связными и регулярными степени  $|S|$ . *Диаметр* графа Кэли  $\Gamma$  равен максимальному расстоянию между единичным элементом и любым  $g \in G$ , а также максимальной из длин наиболее коротких выражений элементов группы в виде произведения порождающих. *Спектр* графа  $\Gamma$  определяется как множество характеристических корней матрицы смежности.

В силу определения, введённого Ф. Харари и А. Д. Швенком в работе [1], граф  $\Gamma$  называется *целочисленным*, если его спектр состоит из целых чисел. В этой же работе они поставили задачу поиска целочисленных графов.

Количество целочисленных графов не только бесконечно, но такие графы встречаются среди графов произвольного порядка [2]. Тем не менее, они являются очень редкими и найти их достаточно трудно [3]. Более точно, в 2009 году О. Ахмади, Н. Алон, И. Ф. Блейк, И. Е. Шпарлински доказали, что вероятность того, что помеченный граф с  $n$  вершинами будет целочисленным, не превосхо-

дит  $2^{-n/400}$  для достаточно больших  $n$ . Эти результаты показывают, что поиск целочисленных графов стоит вести внутри конкретных семейств. К этой задаче, в свою очередь, можно подходить с двух сторон. Можно рассматривать семейства графов как таковых, например, графов с заданной максимальной степенью вершин или  $k$ -регулярных графов. Такая работа велась, например, для кубических графов Ф. С. Бюссмакером и Д.М. Цветковичем [49], а также А. Д. Швенком [48], которые доказали, что существует ровно 13 связных кубических целочисленных графов. С другой стороны, можно рассматривать графы, ассоциированные с семействами конечных групп, порождённых определёнными наборами порождающих. Это и есть графы Кэли, которые были определены выше. Именно этот подход представлен в настоящей работе.

Заметим, что не все графы являются графами Кэли каких-либо групп. Например, А. Абдоллахи и Е. Ватандуст [50] показали, что среди упомянутых выше 13 связных кубических целочисленных графов только 7 являются графами Кэли.

На настоящий момент существует много интересных результатов о графах Кэли. Некоторые целочисленные графы Кэли на абелевых, диэдральных и циклических группах исследовались в [4; 6; 7; 9].

Приведём пример бесконечного семейства целочисленных графов Кэли. Обозначим через  $\text{Sym}_n$  группу всех биективных отображений множества  $\{1, 2, \dots, n\}$  на себя. *Звёздный граф*  $S_n = \text{Cay}(\text{Sym}_n, T)$ ,  $n \geq 2$ , который является графом Кэли на симметрической группе  $\text{Sym}_n$  относительно порождающего множества, состоящего из транспозиций вида  $T = \{(1j) \mid 2 \leq j \leq n\}$ , является связным двудольным  $(n-1)$ -регулярным графом. Спектр звёздного графа целочисленный, более точно, для  $n \geq 2$  и для любого целого  $1 \leq k \leq n-1$  значения  $\pm(n-k)$  являются собственными значениями графа  $S_n$ ; если  $n \geq 4$ , то 0 тоже является собственным значением графа  $S_n$ . Поскольку звёздный граф является двудольным, для кратностей его собственных значений верно  $\text{mul}(n-k) = \text{mul}(-n+k)$  для любого целого  $1 \leq k \leq n$ . В частности,  $\pm(n-1)$  являются простыми (кратности один) собственными значениями графа  $S_n$ . Целочисленность спектра звёздного графа  $S_n$  следует из изучения спектров элементов Юнга-Юциса-Мёрфи в групповой алгебре симметрической группы [5; 8; 10]. В [11] исследовались вторые по минимальности неотрицательные собственные значения  $z_2$  графа Кэли на симметрической группе, порождённой транспозици-

ями. Было доказано, что среди всех множеств из  $n - 1$  транспозиции, порождающих симметрическую группу, множество, чей соответствующий граф Кэли имеет наибольшее  $z_2 = 1$  — это множество  $T$ . Это означает, что не существует других целочисленных графов Кэли на симметрической группе, порождённых множеством, состоящим из  $n - 1$  транспозиции. Также стоит отметить, что до настоящего времени не было известно о существовании графов Кэли на симметрической группе с другими (отличными от упомянутого множества транспозиций) порождающими множествами.

**Цель работы.** Целью нашей работы является построение и реализация алгоритма для изучения спектров графов Кэли некоторых конечных групп, в частности, определение новых целочисленных графов и их семейств. Основное направление исследования — графы Кэли конечных групп, заданных различными наборами порождающих, в частности, наборами инволюций. Кроме этого, мы хотим не только показать целочисленность определённых графов, но и привести их полные спектры и определить диаметры. Первая задача представляет теоретический интерес, а вторая — практический.

**Объектом исследования** в предлагаемой работе являются графы Кэли некоторых конечных групп, в частности, симметрической, знакопеременной, некоторых линейных групп, групп диэдра, а также других групп малых порядков.

**Состояние проблемы.** Как уже отмечалось, в связи с малой вероятностью для графа с  $n$  вершинами быть целочисленным, в общем случае задача характеристики целочисленных графов представляется крайне сложной. Таким образом, имеет смысл свести исследование к отдельным интересным семействам графов.

На данный момент имеется много различных результатов, связанных с некоторыми частными случаями целочисленных графов. Например, важные результаты, касающиеся целочисленных графов, получены Цветковичем (1974, 1975, 1998), Швенком (1978), Симичем (1986, 1995, 1998, 2001, 2002), Балиншкой (1999, 2001, 2002, 2004) и другими. Ройтман (1984) построил бесконечное семейство целочисленных полных трёхдольных графов. Лепович (Lepovic, 2003, 2004) представил результаты о целочисленных графах, принадлежащих классам  $\overline{\alpha K_{a,b}}$ ,  $\overline{\alpha K_a \cup \beta K_b}$  или  $\overline{\alpha K_a \cup \beta K_{b,b}}$  (подробнее об этих семействах см. в разделе 1.2). Ещё одним важным семейством графов, для которых рассматри-

валась указанная проблема, являются деревья. Это отражено в исследованиях Харари (1974), Швенка (1974, 1979), Ватанабе (1979), Ли (1987, 1999, 2000, 2002, 2004), Лю (1988), Чао (1988, 1991), Юаня (1998), Хика (1997, 1998, 2003), Ванга (1999, 2000, 2002, 2004) и других. В работе Овчаренко (2017) [110] найдены примеры целочисленных графов Кэли знакопеременной группы  $A_n$  для некоторых  $n$ .

**Задачи исследования.** Мы исследуем графы Кэли некоторых конечных групп, заданных различными наборами порождающих. Поставленные задачи:

1. Разработать конструктивный способ нахождения определяющих соотношений для заданного набора порождающих конечной группы.
2. Определить копредставления для различных наборов порождающих знакопеременной группы  $A_n$  и симметрической группы  $S_n$ .
3. Построить графы Кэли и целочисленные части их спектров для симметрических групп  $S_n$  при  $n = 3, 4, 5, 6$ , порожденных набором всех транспозиций вида  $(ij)$  и набором всех инволюций, для знакопеременных групп  $A_n$  при  $n = 4, 5, 6, 7, 8$  для различных наборов порождающих, для линейных групп  $L_2(n)$  при  $n = 5, 7, 8, 9, 11, 13$ , порожденных набором всех инволюций, для групп диэдра  $D_{2n}$  при  $n = 6, 7, \dots, 132$ , порожденных набором всех инволюций.
4. Разработать алгоритм поиска целочисленных графов Кэли.
5. Определить диаметры и средние диаметры графов групп из п.3:

**Методы исследования.** Исследование заключается в разработке алгоритма поиска целочисленной части спектра заданного графа Кэли и реализации его в программном коде с помощью применения пакета GAP (от англ. Groups, Algorithms, Programming) [12] — свободно распространяемой на условиях лицензии GNU GPL кроссплатформенной системы компьютерной алгебры для вычислительной дискретной алгебры с особым вниманием к вычислительной теории групп, а также свободного программного обеспечения Python. Программный код применяется для проверки результатов, ранее полученных «вручную», а также для получения новых данных, а именно, нахождения спектров графов Кэли, проверки их целочисленности, а также определения диаметров и средних диаметров.

**Положения, выносимые на защиту.**

1. Разработан алгоритм поиска целочисленных графов Кэли (Глава 2, раздел 2.1).
2. Определены новые семейства целочисленных графов Кэли, а также их полные спектры для:
  - симметрических групп  $S_n$ , порожденных набором всех транспозиций вида  $(ij)$  и набором всех инволюций для  $n = 3, 4, 5, 6$  (Глава 4, табл. 4.2);
  - знакопеременных групп  $A_n$  для  $n = 4, 5, 6, 7, 8$ , с различными наборами порождающих (Глава 4, табл. 4.1);
  - линейных групп  $L_2(n)$  для  $n = 5, 7, 8, 9, 11, 13$ , порожденных набором всех инволюций (Глава 4, табл. 4.4);
  - групп диэдра  $D_{2n}$  для  $n = 6, 7, \dots, 132$ , порожденных набором всех инволюций (Глава 4, табл. 4.5).
3. Для перечисленных выше групп и соответствующих графов Кэли найдены диаметры и средние диаметры (Глава 4, табл. 4.6, 4.7, 4.8, 4.9).

### **Научная новизна результатов работы.**

Все результаты работы являются новыми.

1. Разработан оригинальный алгоритм, который определяет, является ли заданный граф Кэли целочисленным. Как в случае положительного, так и в случае отрицательного ответа на этот вопрос, алгоритм строит полный целочисленный спектр графа, включая кратности собственных значений.
2. Найдены новые семейства целочисленных графов Кэли, а именно:
  - знакопеременных групп  $A_n$  при  $n = 4, 5, 6, 7, 8$ , порождённых множеством 3-циклов вида  $(12i)$ ;
  - симметрических групп  $S_n$  при  $n = 3, 4, 5, 6$ , порождённых набором всех транспозиций вида  $(ij)$  и набором всех инволюций;
  - линейных групп  $L_2(n)$  при  $n = 5, 7, 8, 9, 11, 13$ , порождённых набором всех инволюций;
  - диэдральных групп  $D_{2n}$  при  $n = 6, 7, \dots, 132$ , также порождённых множеством всех инволюций.
3. Для других классических наборов порождающих знакопеременной группы  $A_n$  при  $n = 4, 5, 6, 7$  определены целочисленные части спектра.

4. Для построения графов Кэли знакопеременной и симметрической группы потребовалось разработать теоретический метод нахождения определяющих соотношений, используя связь между наборами порождающих в различных копредставлениях группы.

**Теоретическая и практическая ценность полученных результатов.**

В 1986 году С. Эйкерс и Б. Кришнамурти [13] впервые предложили использовать графы Кэли для представления компьютерных сетей, в том числе, для моделирования топологий многопроцессорных вычислительных систем.

На данный момент графы Кэли широко применяются в качестве основы для создания топологий для многопроцессорных вычислительных систем. Например, такие базовые топологии сети, как «кольцо», «гиперкуб» и «тор», являются графами Кэли.

Это связано с тем, что графы Кэли имеют много привлекательных свойств, а именно: регулярность, вершинная транзитивность, малый диаметр и степень при достаточно большом количестве вершин в графе.

В диссертационной работе найдены диаметры и средние диаметры графов Кэли, изучавшихся с точки зрения целочисленности их спектров, а именно:

- знакопеременных групп  $A_n$  при  $n = 4, 5, 6, 7$ ;
- симметрических групп  $S_n$  при  $n = 3, 4, 5, 6$ , порождённых набором всех транспозиций вида  $(ij)$  и набором всех инволюций;
- линейных групп  $L_2(n)$  при  $n = 5, 7, 8, 9, 11, 13$ , порождённых набором всех инволюций;
- диэдральных групп  $D_{2n}$  при  $n = 6, 7, \dots, 132$ , также порождённых множеством всех инволюций.

Напомним, что граф  $k$ -мерного гиперкуба имеет  $2^k$  вершин, его степень и диаметр равны  $k$ , средний диаметр равен  $\frac{k}{2}$ . Сравнение полученных характеристик графов Кэли исследуемых групп с соответствующими характеристиками гиперкубов и торов показало, что графы знакопеременных, симметрических, линейных групп и групп диэдра (в особенности, групп диэдра) обладают более предпочтительными характеристиками, чем гиперкубы. Напомним, что топология  $\Gamma_1$  считается предпочтительнее  $\Gamma_2$ , если  $|V_1| \simeq |V_2|$ , но  $s_1 < s_2$  и  $D_1 < D_2$ , где  $V$  — количество вершин,  $s$  — степень вершины,  $D$  — диаметр. Отсюда можно

сделать вывод, что данные графы заслуживают внимания при проектировании перспективных топологий многопроцессорных вычислительных систем.

Основные этапы исследования выполнены в ходе осуществления работ по проектам:

- НИОКТР АААА-А17-117041910201-1 «Алгоритмические задачи в информационных технологиях» (03/04/2017 - 29/12/2017, руководитель проекта д.ф.-м.н. профессор Лыткина Д.В.);
- НИОКТР АААА-А18-118041990034-0 «О графах Кэли как возможных графах межмашинных связей» (02/04/2018 - 29/12/2018 руководитель проекта д.ф.-м.н. профессор Лыткина Д.В.).

Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Результаты работы внедрены в учебный процесс СибГУТИ: в курс лекций по дисциплине «Дискретная математика», раздел «теория графов», что подтверждается соответствующим актом.

Результаты диссертационной работы используются в архитектурных решениях Сибирского Филиала Акционерного общества Коммерческого Банка «Модульбанк», а именно, в ускорении процесса обработки пользовательской информации, что подтверждается актом внедрения.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на международных и всероссийских научных конференциях, в их числе:

- Российская научно-техническая конференция «Обработка информации и математическое моделирование» («СибГУТИ», г. Новосибирск, 21-22 апреля, 2016г.).
- Международная научная конференция «Мальцевские чтения» (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, 21-25 ноября, 2016г.).
- Российская научно-техническая конференция «Обработка информации и математическое моделирование» («СибГУТИ», г. Новосибирск, 26-27 апреля, 2017г.).
- Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» (г. Нальчик – Терскол, 17-21 мая, 2017).

- Международная научная конференция «Groups and graphs, metrics and manifolds» (Уральский Федеральный Университет, г. Екатеринбург, 22-30 июля, 2017г.).
- Российская научно-техническая конференция «Обработка информации и математическое моделирование» («СибГУТИ», г. Новосибирск, 26-27 апреля, 2018г.).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 10 работ, из которых 3 работы входят в список ВАК и 5 работ из списка РИНЦ. Получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Доля личного вклада в работах, выполненных в соавторстве, составляет не менее 50%.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка используемых литературных источников, изложенных на 86 страницах, а также приложений на 11 страницах. Работа содержит 16 таблиц и 1 рисунок. Список литературы содержит 113 наименований.

#### **Содержание работы.**

**В первой главе** приводятся основные понятия, связанные с теорией групп и свойствами графов Кэли, которые мы будем использовать в работе. Приводится обзор существующих аналогов исследования целочисленных графов и их диаметров.

**Во второй главе** описываются подходы и построена схема эксперимента. Приводится описание алгоритма нахождения полного спектра и определение его целочисленности. Показан пример определения целочисленности графа Кэли и его полного спектра для знакопеременной группы  $A_n$  при  $n = 4$ .

**В третьей главе** дается описание основных алгоритмов и используемых методов. В том числе, приводится и обосновывается способ нахождения определяющих соотношений с использованием связи между наборами порождающих. По этой схеме строятся копредставления симметрической группы  $S_n$  и знакопеременной группы  $A_n$  для различных наборов порождающих.

**Четвертая глава** содержит экспериментальные результаты, полученные при помощи разработанного и реализованного в виде программного кода алгоритма. Приведены целочисленные части спектров, диаметры и средние диа-

метры графов Кэли симметрической группы  $S_n$ , знакопеременной группы  $A_n$ , линейной группы  $L_2(n)$ , группы диэдра  $D_{2n}$ , и других групп малых порядков.

**В заключении** формулируются основные результаты диссертационной работы.

**В приложении** приводится исходный код программы [113], реализующий разработанный алгоритм. Представлены акты о внедрении в учебный процесс, внедрение на производство, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

## Глава 1. Предварительные сведения

### 1.1 Основные понятия

#### 1.1.1 Графы Кэли

Граф  $\Gamma = (V, E)$  состоит из конечного непустого множества  $V$  вершин и множества  $E$  ребер (неупорядоченных пар различных вершин). *Порядок* графа определяется мощностью множества его вершин. Две вершины являются *смежными*, если они принадлежат одному ребру. В этом случае вершины ребра будут ему *инцидентны*. *Степенью* вершины называется число инцидентных ей ребер.

Граф является *связным*, если между любой парой вершин этого графа существует, по крайней мере, один путь, связывающий их. Два графа  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  *изоморфны*, если между их множествами вершин существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность.

*Графом Кэли*  $\Gamma = \text{Cay}(G, S) = (V, E)$  на группе  $G$  относительно порождающего множества  $S$  называется граф с множеством вершин  $V = G$  и множеством ребер  $E = \{(g, h) \mid g, h \in G, g^{-1}h \in S\}$ . Иными словами, графом Кэли группы  $G$  по системе порождающих  $S$  является граф, вершинами которого являются элементы группы, и элемент  $g$  соединён рёбрами в точности с теми элементами, которые получаются домножением  $g$  на элементы из  $S$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В случае если  $S \neq S^{-1}$ , вместо  $S$  берут объединение  $S \cup S^{-1}$ . Это позволяет считать граф Кэли неориентированным. Кроме того, он не содержит петель, так как единичный элемент не принадлежит  $S$ .

*Диаметр* графа Кэли [17] определяется как максимальная длина наименьшего выражения элемента группы через произведение порождающих группы, где максимум выбирается среди всех элементов группы:

$$\text{diam}(\Gamma(G, S)) = \max_{g \in G} \min_k g = s_1 \dots s_k.$$

*Компонента* связности графа  $\Gamma$  (или просто компонента графа  $\Gamma$ ) — это максимальное по включению связное множество вершин графа [18].

Граф  $\Gamma$  называется *регулярным* степени  $k$ , если каждая его вершина имеет степень  $k$  [17].

Полный граф  $K_n$  на  $n$  вершинах [18] — граф, у которого любые две различные вершины соединены ребром.

*Матрица смежности* [19]  $A(\Gamma) = (a_{ij})$  графа  $\Gamma$  является симметричной матрицей размером  $n \times n$  из нулей и единиц, где  $a_{ij} = 1$  тогда и только тогда, когда вершины  $v_i$  и  $v_j$  соединены ребром.

*Характеристическим многочленом*  $\Gamma$  [19] является многочлен  $P(\Gamma, x) = \det(xI_n - A(\Gamma))$ , где  $I_n$  обозначает единичную матрицу, размерности  $n \times n$ ,  $A(\Gamma)$  — матрица смежности графа.

Граф называется *целочисленным* [19], если все корни характеристического многочлена  $P(\Gamma, x)$  являются целыми числами.

*Спектром* матрицы  $A(\Gamma)$  [19] называется множество корней ее характеристического многочлена. Спектр  $A(\Gamma)$  также называется спектром  $\Gamma$ . Если собственные значения упорядочены  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r$ , а их кратности равны соответственно  $m_1, m_2, \dots, m_r$ , то мы будем писать

$$\text{Spec}(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_r \\ m_1 & m_2 & \dots & m_r \end{pmatrix}$$

или

$$\text{Spec}(G) = \{(\lambda_1)^{m_1}, (\lambda_2)^{m_2}, \dots, (\lambda_r)^{m_r}\}.$$

### 1.1.2 Группы

Приведем понятия и определения, которые будут использоваться в работе. Определения приводятся согласно [14].

*Группа* — непустое множество элементов  $a, b, c, \dots$  с бинарной операцией  $\cdot$ , удовлетворяющей следующим четырем постулатам:

1. Для каждой упорядоченной пары  $a, b$  элементов из  $G$  ( $a \neq b$  или  $a = b$ ) однозначно определен такой единственный элемент  $c \in G$ , что

$$a \cdot b = c$$

( $c$  называется  $a$  и  $b$ ; мы часто опускаем точку и пишем просто  $ab = c$ ).

2. Операция  $\cdot$  ассоциативна, т.е. для любых элементов  $a, b, c$  из  $G$  имеет место

$$(ab)c = a(bc).$$

3. В  $G$  существует такой элемент  $1$ , что

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a,$$

где  $a$  – произвольный элемент из  $G$ . (Элемент  $1$  называется *единицей* или *нейтральным элементом* группы  $G$ ).

4. Для любого элемента  $a$  из  $G$  существует такой элемент  $a^{-1}$ , что

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

( $a^{-1}$  называется *обратным* к  $a$ ).

Группа  $G$  называется *конечной*, если множество  $G$  является конечным. *Порядок* конечной группы равен числу элементов в ней.

Пусть  $G$  – конечная группа и  $S \subset G$ . Множество  $S$  называется *порождающим множеством* группы, а его элементы – *порождающими*, если любой элемент группы  $G$  может быть представлен как конечная последовательность порождающих (с учетом бинарной операции в группе). Порождающее множество группы еще называют *системой образующих*.

Описание группы посредством *множества образующих* и *множества определяющих соотношений* между этими образующими, т.е. таких соотношений, из которых выводимы все остальные, называется *заданием* (*представлением*) группы.

*Левым смежным классом* группы  $G$  по подгруппе  $H$  называется множество  $xH = \{xh \mid h \in H\}$ . Элемент  $x$  называется представителем смежного класса. *Правый смежный класс* определяется аналогично. Свойства смежных классов:

1. смежные классы либо не пересекаются, либо совпадают;
2. смежные классы равномощны;
3. элементы  $a, b$  содержатся в одном смежном классе по подгруппе  $H$ , если  $b^{-1}a \in H$ .

Пусть группа  $G$  имеет представление  $G = \langle a, b, c, \dots; P, Q, R, \dots \rangle$  относительно отображения  $a \rightarrow g, b \rightarrow h, c \rightarrow r, \dots$ . И пусть  $N$  — нормальная подгруппа. Будем считать, что  $N$  определяется как нормальная подгруппа группы  $G$ , порожденная словами:  $S(a, b, c, \dots), T(a, b, c, \dots)$ . Напомним, что нормальная подгруппа группы, порожденная некоторым множеством элементов — это наименьшая нормальная подгруппа, содержащая эти элементы. Тогда *фактор-группа*  $G/N$  имеет представление  $\langle a, b, c, \dots; P, Q, R, \dots, S, T, \dots \rangle$  относительно отображения  $a \rightarrow gN, b \rightarrow hN, c \rightarrow rN, \dots$  [14].

В работе рассматриваются следующие семейства групп: симметрическая группа  $S_n$ , знакопеременная группа  $A_n$ , линейная группа  $L_2(n)$ , группа диэдра  $D_{2n}$ .

Биективное преобразование  $\pi$  непустого множества  $X$ , т. е. взаимно однозначное отображение  $X$  на себя, называется *подстановкой* множества  $X$ .

Подстановка  $\pi \in S_n$  вида

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{s-1} & i_s & k_1 & \dots & k_t \\ i_2 & i_3 & \dots & i_s & i_1 & k_1 & \dots & k_t \end{pmatrix},$$

где  $\{i_1, i_2, \dots, i_s, k_1, \dots, k_t\} = \{1, 2, \dots, n\}$  и  $s \geq 2$ , называется циклом длины  $s$  и обозначается  $(i_1, i_2, \dots, i_s)$ . Иными словами длина цикла определяется числом элементов в перестановке.

Подстановка  $\pi \in S_n$ , множество  $supp(\pi)$  перемещаемых символов которой состоит из  $n$  элементов, раскладывается в произведение  $k$  независимых циклов. Декрементом  $d(\pi)$  подстановки  $\pi$  называется разность  $n - k$ . Знаком подстановки  $\pi$  называется число  $sgn(\pi) = (-1)^{d(\pi)}$ . Подстановка называется *чётной*, если  $sgn(\pi) = 1$ , и *нечётной*, если  $sgn(\pi) = -1$ .

Существенен способ разложения подстановки в произведение циклов специального вида, так называемых *транспозиций* [15], или циклов длины 2. Известно, что каждая подстановка  $\pi \in S_n$  раскладывается в произведение транспозиций.

Группа  $S(X)$  всех подстановок множества  $X$  называется *симметрической группой* подстановок множества  $X$ . Произвольную подгруппу этой группы будем называть группой подстановок множества  $X$ . Поскольку свойства группы подстановок множества  $X$  не зависят от природы элементов из  $X$ , симметрические группы подстановок равномоощных множеств изоморфны. В случае, когда множество  $X$  конечно и состоит из  $n$  элементов, будем обозначать симметрическую группу подстановок множества  $X$  через  $S_n$  (симметрическая группа степени  $n$ ) и полагать, что  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Элементы множества  $X$  будем называть символами.

Если  $n$  – произвольное кардинальное число, то *знакопеременной группой* [16] степени  $n$  называют группу  $A_n$  тех преобразований множества мощности  $n$ , каждое из которых действительно передвигает лишь конечное число символов и разлагается в произведение четного числа транспозиций.

Пусть  $K$  – поле. Фактор-группа  $PSL_n(K)$  специальной линейной группы  $SL_n(K)$  по ее центру – подгруппе скалярных матриц – называется *проективной специальной линейной группой* [16]. Другое обозначение этой группы:  $L_n(a)$ . Эти группы – над конечными полями – были введены в числе других серий групп Жорданом (1870), который установил их простоту.

*Диэдральная группа (группа диэдра)*  $D_n$  состоит из  $2n$  элементов, являющихся симметриями правильного  $n$ -угольника,  $n$  из которых являются поворотами на угол  $2\pi k/n$ ,  $0 \leq k < n$ , а другие  $n$  – это отражение относительно прямых, проходящих через вершины  $n$ -угольника и его центр, а также через середины сторон  $n$ -угольника и его центр. Порождающее множество группы диэдра  $D_n$  состоит из двух преобразований: поворота на угол  $2\pi/n$  и любого из отражений. Таким образом, группа  $D_n$  состоит из вращений и отражений правильного  $n$ -угольника.

## 1.2 Обзор аналогов

### 1.2.1 Регулярные графы

В этом разделе приводится обзор результатов о целочисленных графах. Будут рассматриваться только простые графы (т. е. конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер). Пусть  $G$  — простой граф с множеством вершин  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  и множеством ребер  $E(G)$ .

Поставленный в 1974 году Харари и Швенком вопрос [1] о целочисленности графов был сопровожден замечанием о том, что общая проблема оказывается неразрешимой. Действительно, число целочисленных графов не только бесконечно, но их можно найти во всех классах графов и среди графов всех порядков. Однако они очень редки, и их трудно найти.

Кроме того, существуют сравнительно огромные (возможно, бесконечные) классы графов, содержащие очень ограниченное (конечное) число целочисленных графов. Например, если рассматривать только графы с заданной максимальной степенью вершин, то число таких целочисленных графов конечно [20].

Так как спектр несвязного графа является объединением спектров его компонентов, то при любом исследовании целочисленных графов достаточно рассматривать только связные графы.

Непосредственным примером множества, состоящего полностью из целочисленных графов, приведённым в таблице 1.1, является множество полных графов  $K_n$ , собственными значениями которых являются:  $(n - 1)^1$  и  $(-1)^{n-1}$ . Подобное же происходит с графом cocktail-party  $CP(n)$ ; собственные значения  $CP(n)$  равны:  $(2n - 2)^1$ ,  $(0)^n$ ,  $(-2)^{n-1}$ . Кроме того, полный многорядный граф  $K_{n/k, n/k, \dots, n/k}$  на  $n$  вершинах и  $k$ -цветовой класс размера  $n/k$  всегда является целочисленным; собственные значения:  $(n - n/k)^1$ ,  $(0)^{n-k}$ ,  $(-n/k)^{k-1}$ ; путь  $P_2$  ( $P_2$  — единственный целочисленный путь в множестве путей  $P_n$  с  $n$  вершинами); циклы  $C_3$ ,  $C_4$  и  $C_6$  (эти три цикла являются единственными целочисленными циклами в множестве циклов  $C_n$  с  $n$  вершинами); полный двудольный граф  $K_{m/n}$  ( $K_{m/n}$  целочисленный тогда и только тогда, когда  $mn$  — идеальный квадрат, т.е. целое число, квадратный корень из которого является целым числом);

звезда  $K_{1/n}$  с  $n = p^2$ , ( $p = 1, 2, 3, \dots$ ), и т. д. В таблице 1.1 представлены простые примеры целочисленных графов, а также их собственные значения и соответствующие им кратности.

Таблица 1.1 Простые примеры целочисленных графов

Группа	Собственные значения	Соответствующие кратности	Целочисленные графы
$K_n$	$n - 1, -1$	$1, n - 1$	Все
$CP(n)$	$2n - 2, 0, -2$	$1, n, n - 1$	Все
$K_{n/k, n/k, \dots, n/k}$	$n - n/k, 0, -n/k$	$1, n - k, k - 1$	Все
$P_n$	$2 \cos(\frac{k\pi}{n+1}), k = 1, 2, \dots, n$	$1, 1, \dots, 1$	$P_2$
$C_n$	$2 \cos(\frac{2k\pi}{n}), k = 1, 2, \dots, n$	$2, 1, 1, \dots, 1, 2$ для $n$ четных $1, 1, \dots, 1, 2$ для $n$ нечетных	$C_3, C_4, C_6$
$K_{m/n}$	$\sqrt{mn}, 0, -\sqrt{mn}$	$1, m + n - 2, 1$	$mn = c^2$

Теорема 1 [2]. Пусть  $G = NEPS(G_1, \dots, G_n; B)$ ,  $NEPS$  — *non-complete extended p-sum of graphs* (неполная расширенная  $p$ -сумма графов) и пусть  $G_1, \dots, G_n$  — связные графы. Тогда  $G$  — регулярный целочисленный граф тогда и только тогда, когда  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , являются регулярными целочисленными графами.

Один из первых более общих результатов по целочисленным графам касается вопроса о конечности числа целочисленных графов внутри бесконечного семейства графов [20].

Теорема 2 [2]. Множество  $I_r$  всех регулярных связных целочисленных графов фиксированной степени  $r$  конечно.

Чтобы убедиться в этом, заметим, что, кроме максимальной степени вершины, диаметр любого графа  $I_r$  ограничен (а именно, поскольку спектр регулярного графа степени  $r$  лежит в отрезке  $[-r, r]$ , число различных целых собственных значений не превосходит  $2r + 1$ , и следовательно, диаметр не превышает  $2r$  (см., например, [23], стр. 88). Точно так же можно доказать, что множество всех нерегулярных связных целочисленных графов с заданной максимальной степенью вершин конечна.

## 1.2.2 Деревья

Деревья — еще одно важное и интересное семейство графов.

В первоначальной работе Ф. Харари и А. Я. Швенка [1] также были упомянуты целочисленные деревья, а первые значительные результаты по этой теме были опубликованы М. Ватанабе и А. Я. Швенком [25; 26].

В 1987 году Ли и Лин [28] дали ответы на вопросы, предложенные Швенком (см. также [29]). Они изучили целочисленные деревья с диаметрами 4, 5 и 6 и обнаружили некоторые новые бесконечные множества целочисленных деревьев с диаметрами 4 и 6. Кроме того, они подняли несколько открытых проблем.

В работе [28] были впервые упомянуты целочисленные деревья с диаметром пять, и была представлена теорема в виде необходимого и достаточного условия, чтобы такое дерево было целочисленным, но авторы не смогли найти ни одного примера. Первое целочисленное дерево диаметра 5 было найдено Р. У. Лю (R. Y. Liu) в 1988 году [30].

Среди результатов на целочисленных деревьях важное место занимают так называемые сбалансированные деревья, т.е. деревья, симметричные относительно вершины (корня) или ребра. Исходя из понятия эксцентриситета  $ecc(v)$  вершины  $v$  в связном графе  $G$ , определяемом как  $ecc(v) = \max d(v, w)$  для всех вершин  $w$  из  $G$ , мы можем определить центральную вершину (из  $G$ ) как вершину минимального эксцентриситета; центр  $G$  является множеством его центральных вершин. Но если  $G$  - дерево, то согласно известной теореме Д. Кёнинга (D. König), его центр состоит из одной вершины или двух смежных вершин. Далее, дерево  $T$  называется сбалансированным, если все вершины на одном и том же расстоянии от центра  $Z(T)$  имеют одинаковую степень. Сбалансированное дерево однозначно определяется соотношением его диаметра и последовательности  $n_k, n_{k-1}, \dots, n_1$ , где  $k$  — радиус  $T$  и  $n_j$   $1 \leq j \leq k$  — число преемников вершины на расстоянии  $k - j$  от центра  $Z(T)$ . Если  $diam(G)$  нечетен, эта последовательность может быть представлена в виде  $(1; n_k, n_{k-1}, \dots, n_1)$ .

П. Хик (P. Hic) и Р. Недела (R. Nedela) [31] нашли первое целочисленное дерево диаметра 8 в 1998 году. Хик и Недела сначала построили бесконечно много целочисленных деревьев с диаметром 8 и получили некоторые положительные и отрицательные результаты по вопросам о сбалансированных цело-

численных деревьях. Они также доказали, что не существует сбалансированных целочисленных деревьев с диаметром  $4k + 1$  при  $k \geq 1$ . Ванг, Ли и Лю [32] также независимо построили некоторые семейства целочисленных деревьев с диаметром 8, используя другой метод в 1999 году.

В 1998 году П. З. Юань (P. Z. Yuan) [33] определил необходимое условие для того, чтобы деревья  $S(r; m_i)$  диаметра 4 были целочисленными, и построил много новых классов таких целочисленных деревьев. Кроме того, некоторые основные вопросы о целочисленных деревьях с диаметром 4 были поставлены в [33].

Затем Д. Л. Чжан и С. В. Тан (D. L. Zhang and S. W. Tan) [34], а также М. С. Ли, В. С. Ян и Дж. Б. Ванг (M. S. Li, W. S. Yang and J. B. Wang) [35] в 2000 году дали еще одно полезное необходимое и достаточное условие для того, чтобы графы были такими целочисленными деревьями. На некоторые вопросы, предложенные Юанем в [33], были даны ответы в [34–39]. Ванг, Ли и др. также исследовали целочисленные деревья с диаметрами 4, 5, 6 и 8 в [40–45].

В 2003 году П. Хик и М. Покорный (P. Hic and M. Pokorny) [46] исследовали целочисленные сбалансированные корневые деревья диаметров 4, 6, 8 и 10. Был приведен бесконечный класс целочисленных сбалансированных корневых деревьев с диаметром 10. Проблема существования целочисленных сбалансированных корневых деревьев сколь угодно большого диаметра остается открытой.

### 1.2.3 Некоторые частные классы целочисленных графов

Так как спектр несвязного графа является объединением спектров его компонентов, то при любом исследовании целочисленных графов достаточно рассматривать только связные графы.

Некоторые из хорошо известных операций на графах, применяемые к целочисленным графам, приводят к новым целочисленным графам и поэтому могут быть использованы для генерации любого их количества.

Рассмотрим следующие три операции на графах:

- *Тензорное произведение*  $G \times H$  графов  $G$  и  $H$ : вершины  $(x,a)$  и  $(y,b)$  смежны в  $G \times H$  тогда и только тогда, когда  $x$  смежна с  $y$  в  $G$  и  $a$  смежна с  $b$  в  $H$ .

- *Сумма* (или декартово произведение)  $G + H$  группы  $G$  и  $H$ : вершины  $(x,a)$  и  $(y,b)$  смежны в  $G + H$  тогда и только тогда, когда либо  $x = y$ , либо  $a$  смежно с  $b$  в  $H$  или  $a = b$  и  $x$  смежна с  $y$  в  $G$ .

- *Сильная сумма* (или сильное произведение)  $G \oplus H$  группы  $G$  и  $H$ : вершины  $(x,a)$  и  $(y,b)$  смежны в  $G \oplus H$  тогда и только тогда, когда  $a$  смежна с  $b$  в  $H$  и либо  $x$  смежна с  $y$  в  $G$  или  $x = y$ .

Результаты следующие:

Если  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и  $\mu_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) — собственные значения  $G$  и  $H$  соответственно, то

(1) *произведение*  $G \times H$  имеет собственные значения  $\lambda_i \mu_j$ ,

(2) *сумма*  $G + H$  имеет собственные значения  $\lambda_i + \mu_j$ ,

(3) *сильная сумма*  $G \oplus H$  имеет собственные значения  $\lambda_i \mu_j + \lambda_i + \mu_j$ ,

(во всех этих случаях  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ ). Таким образом, эти три операции сохраняют целочисленность.

В общем случае, как уже отмечалось, проблема характеристики целочисленных графов представляется очень сложной. Поскольку общей характеристики (помимо определения) этих графов не существует, задачу нахождения целочисленных графов следует рассматривать для некоторых специальных интересных классов графов.

## 1. Кубические графы

Кубический граф является 3-регулярным графом [2].

«Существует ровно 13 связных кубических целочисленных графов». Так называлась статья Ф. С. Бюссмакера и Д. М. Четковича [47], опубликованная в 1976 году, в которой объявили о первом значительном результате в поисках целочисленных графов (на самом деле первая часть этого исследования была представлена в [20], а оставшаяся часть была приведена в [47]). В то же время, тот же результат был независимо анонсирован (и опубликован чуть позже) Швенком [48]. Интересно, что методы исследования, используемые разными авторами, также несколько отличались друг от друга. Ф. С. Бюссмакер и Д. Четкович объединили компьютерные вычисления с теоретическими рассуждениями, в то время как А. Д. Швенк полностью добился результата «вручную».

Первоначальная идея первой части заключалась в том, чтобы перечислить все возможные множества различных собственных значений, затем найти возможные кратности их (с учетом нескольких ограничений, возникающих из связей между спектральными моментами и числом вершин, ребер и треугольников, а также из полинома Хоффмана, см. [23], стр. 95) и, наконец, вывести, существует ли граф (возможно, более одного) с рассматриваемым спектром. Результат, достигнутый путем обсуждения многочисленных частных случаев и сочетания теоретических рассуждений с компьютерными вычислениями, выглядит следующим образом ([20; 47; 48]):

«Существует ровно тринадцать связных кубических целочисленных графов. А именно,  $K_4$ ,  $K_{3,3}$ ,  $C_3 + K_2$ ,  $C_4 + K_2$ ,  $C_6 + K_2$ , граф Петерсена (the Petersen graph),  $L(S(K_4))$ , граф Татта-Коксетера (the Tutte's 8-cage), граф на 10 вершинах, полученных из  $K_{3,3}$ , путем указания пары не смежных вершин и заменяя каждую из них треугольником, граф Дезарга (Desargues' graph) и его коспектральный граф, полученный из двух (непересекающихся) копий  $K_{2,3}$ , путем добавления трех ребер между вершинами второй степени в разных копиях  $K_{2,3}$ , и двудольные графы на 24 вершинах (с обхватом 6).»

Произведение двух целочисленных графов  $G_1$  и  $G_2$  само является целочисленным. В частности, если одним из этих двух графов является  $K_2$  (собственные значения равны  $\pm 1$ ), то произведение, собственные значения которого являются всеми возможными произведениями собственных значений  $G_1$  и  $G_2$ , имеет симметричный спектр, что означает, что он двудольный. Более того, произведение  $G_1 \times K_2$  связно тогда и только тогда, когда  $G_1$  не является двудольным (в случае двудольного  $G_1$  его спектр дублируется умножением на  $K_2$ , что приводит к двум непересекающимся экземплярам  $G_1$ ). Наконец, если  $G_1$  является кубическим, то очевидно, что  $G_1 \times K_2$  также является кубическим графом. Это были исходные факты, на которые Швенк опирался при определении всех связных кубических целочисленных графов. Его идея состояла в том, чтобы начать с определения всех получающихся двудольных графов, а затем посмотреть, какие из них могут быть разложены как  $G \times K_2$ . Используя аналогичный набор ограничений как и Ф. С. Буссемакер и Д. Цветкович, он нашел восемь двудольных связных кубических целочисленных графов, а затем, разложив их все в виде  $G \times K_2$ , получил остальное.

Чветкович [49] доказал, что множество связных регулярных целочисленных графов любой фиксированной степени конечно. Аналогично множество связных целочисленных графов с ограниченными степенями вершин конечно.

## 2. Целочисленные полные графы

Бесконечное семейство целочисленных полных трехдольных графов было построено М. Ройтманом (M. Roitman) в 1984 году (см. также [27]). В 2004 году приведено достаточное и необходимое условие целочисленности полных  $r$ -дольных графов, из которых можно построить бесконечно много новых классов таких целочисленных графов (см. также [51]).

## 3. Нерегулярные не двудольные целочисленные графы с максимальной степенью четыре

Радосавлевич и Симич [19] определили все 13 связных нерегулярных не двудольных целочисленных графов с максимальной степенью четыре (таким же было название доклада, опубликованного в 1986 году [52], полная версия появилась в 1995 году [53]). Соответствующая задача для двудольных графов еще не решена.

## 4. Целочисленные 4-регулярные графы

С 1998 года по настоящее время уделяется много внимания 4-регулярным целочисленным графам. Чветкович (Cvetkovic), Симич (Simic) и Стеванович (Stevanovic) [54] нашли 1888 возможных спектров 4-регулярных двудольных целочисленных графов. Список из 65 известных 4-регулярных связных целочисленных графов приведен в [54].

В 1999 году Стеванович [56] получил результаты о невозможности некоторых из этих потенциальных спектров.

В 2003 г. Стеванович [55] определил все 24 связных 4-регулярных целочисленных графа, в спектрах которых нет чисел  $+3$  и  $-3$ .

## 5. Некоторые графы с несколькими отдельными собственными значениями

В. Г. Бриджес и Р. А. Мена (W. G. Bridges and R. A. Mena) [57;58] в 1979 и 1981 годах исследовали некоторые графы с ровно тремя различными собственными значениями. Е. Р. Ван Дам (E. R. van Dam), В. Х. Хемерс (W. H. Haemers) и др. дополнительно изучили нерегулярные или регулярные графы с несколькими различными собственными значениями в [59–63].

## 6. Конструкции целочисленных графов

В 2000 году Ванг, Ли и Чжан [64] изучили некоторые конструкции на целочисленных графах и получили целочисленные графы  $K_n^t, K_{a,b}^t, K_{a,a,\dots,a}^t$ .

## 7. Связные целочисленные графы с числом вершин не больше 12

К. Балиншка, Д. Четкович, М. Лепов и С. Симич [65] доказали в 1999 году, что существует ровно 150 связных целочисленных графов с числом вершин не больше десяти. Для завершения этого списка необходима помощь компьютера: а именно, в то время как целочисленные графы легко идентифицируются в уже опубликованных таблицах спектров графов спектров, поиск остальной части был обеспечен тем фактом, что файлы с данными всех графов на 8, 9 и 10 вершинах были недавно созданы с помощью компьютера.

Число связных целочисленных графов на  $n \leq 12$  вершинах приведено в таблице 1.2.

Таблица 1.2 Число связных целочисленных графов с  $n$  вершинами

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$i_n$	1	1	1	2	3	6	7	22	24	83	236	325

Случаи  $n \leq 5$  легко получаются из таблиц графовых спектров [23], шесть графов на 6 вершинах могут быть извлечены из таблицы [66], а семь графов на 7 вершинах выбраны из таблицы [67].

Помимо этих графов, [65] содержит полный список связных целочисленных графов на 8, 9 и 10 вершинах вместе со своими спектрами (в наборах коспектральных графов такие графы упорядочены по их углам).

Отметим также, что среди других результатов работы [68] можно найти группы автоморфизмов всех целочисленных графов до девяти вершин и часть графов на десяти вершинах. Интересным может быть тот факт, что все эти графы имеют по крайней мере один нетривиальный автоморфизм.

Эти результаты были распространены на целочисленные графы до 12 вершин [69; 70]. Для этой цели был разработан эволюционный алгоритм, и полученные результаты были проверены методом грубой силы (на суперкомпьютере). Генерация целочисленных (связных) графов на 13 вершинах все еще продолжается.

## 8. Нерегулярные двудольные целочисленные графы

Балиншка и Симич также изучали некоторые нерегулярные, двудольные целочисленные графы с максимальной степенью 4 в [71–73]. Ванг, Ли и Хёде исследовали нерегулярные двудольные целочисленные графы в [74].

### 9. Целочисленные двудольные полурегулярные графы

Чжан и Чжоу [75] получили в 2003 году некоторые новые целочисленные графы, основанные на изучении двудольных полурегулярных графов.

### 10. Некоторые результаты по целочисленным графам, принадлежащим специальным классам

Лепович [76–79] получил в 2003 и 2004 гг. некоторые результаты по целочисленным графам, принадлежащим классу  $\overline{\alpha K_{a,b}}$ ,  $\overline{\alpha K_a \cup \beta K_b}$  или  $\overline{\alpha K_a \cup \beta K_{b,b}}$ .

#### 1.2.4 Диаметр и средний диаметр графов Кэли

В 1986 года С. Эйкерс и Б. Кришнамурти [82] впервые предложили применять графы Кэли для представления компьютерных сетей, в том числе для моделирования топологий многопроцессорных вычислительных систем (МВС) – суперкомпьютеров. С тех пор данное направление активно развивается. Это связано с тем, что графы Кэли имеют много привлекательных свойств, таких как регулярность, вершинная транзитивность, малые диаметр и степень при достаточно большом количестве вершин в графе. Такие базовые топологии сети, как «кольцо», «гиперкуб» и «тор» являются графами Кэли.

Вычисление диаметра графа Кэли большой конечной группы является хотя и разрешимой, но весьма сложной проблемой. Это связано с тем, что в общем случае задача по определению минимального слова в группе, как показали С. Ивен и О. Голдрейх в 1981 году [83], является NP-трудной. Так, при вычислении так называемого «числа Бога», которое равно диаметру соответствующего графа Кэли, Т. Рокики, Г. Коцемба, М. Дэвидсон и Д. Детридж доказали, что любая конфигурация кубика Рубика может быть решена не более чем в 20 ходов. Для установления данного факта потребовалось около 35 «процессоролет» распределенных вычислений. Поэтому для эффективного решения задач на графах Кэли, имеющих большое количество вершин, необходимо применять МВС.

В [84] представлен алгоритм для вычисления диаметра, среднего диаметра и функции роста графа Кэли конечной группы, заданной фиксированным множеством порождающих элементов. Доказана его корректность. На основе данного алгоритма предложена его параллельная версия для исследования графов Кэли групп подстановок. Созданный алгоритм может быть полезен при проектировании топологии многопроцессорной вычислительной системы (МВС). В этом случае модель МВС будет представлена в виде графа Кэли, в котором процессоры являются вершинами графа, а ребра соответствуют физическим соединениям между процессорами. Применение указанного алгоритма позволяет изучить характеристики рассматриваемого графа, что, в свою очередь, дает возможность оценить производительность МВС.

В [85] для  $B_k = B(k,3)$ , где  $k$ -порожденная бернсайдова группа периода 3, были вычислены ранее неизвестные многочлены Холла из  $B_k$  для  $k \leq 4$ . При  $k > 4$  многочлены вычисляются аналогично, но их вывод занимает значительно больше места. Затем с использованием компьютерных расчетов для  $2 \leq k \leq 4$  были получены диаметры и средние диаметры графов Кэли  $B_k$  и их некоторые факторы, порожденные симметричными порождающими множествами. Показано, что эти графы имеют лучшие характеристики, чем гиперкубы. Можно сделать вывод, что графы Кэли  $B_k$  заслуживают внимания при разработке передовых топологий многопроцессорных компьютерных систем.

В [86] исследованы свойства графов Кэли групп Джевонса, заданных различными порождающими множествами. Вычислены диаметры и средние диаметры указанных графов.

В [87] для  $B_0(2,5)$  — максимальной конечной двупорожденной бернсайдовой группы периода 5, порядок которой равен  $5^{34}$ , был определен автоморфизм  $\varphi$ , при котором каждый порождающий элемент отображается в другой порождающий. Пусть  $C_{B_0(2,5)}(\varphi)$  — централизатор  $\varphi$  в  $B_0(2,5)$ . Известно, что  $|C_{B_0(2,5)}(\varphi)| = 5^{17}$ . В работе вычислена функция роста данного централизатора для минимального порождающего множества. В результате получены диаметр и средний диаметр соответствующего графа Кэли  $C_{B_0(2,5)}(\varphi)$ .

## Глава 2. Описание предлагаемого подхода и построения схемы эксперимента

Графы представляют собой элемент математических моделей в самых разнообразных областях науки и практики. С помощью графа можно наглядно указать взаимосвязь между объектами в сложных системах. Многие алгоритмические задачи дискретной математики могут быть сформулированы как задачи, так или иначе связанные с графами, например, задачи, в которых требуется выяснить какие-либо особенности устройства графа, или найти в графе часть, удовлетворяющую некоторым требованиям, или построить граф с заданными свойствами.

Графы Кэли используются не только в математике, но и за ее пределами. Одним из примеров является задача по определению так называемого «числа Бога» кубика Рубика  $3 \times 3$ , т.е. минимального количества поворотов граней кубика, за которое его можно «собрать» из любого начального положения, сводится к исследованию соответствующего графа Кэли. Графы Кэли имеют свое применение в моделировании топологий многопроцессорных вычислительных систем. Графы Кэли имеют много привлекательных свойств, такие как регулярность, вершинную транзитивность, малые диаметр и степень при достаточно большом количестве вершин в графе. Известные топологии сети, такие как кольцо, гиперкуб и многомерный тор являются графами Кэли.

### 2.1 Алгоритм определения целочисленности графов Кэли

Пусть  $A$  — матрица смежности графа Кэли  $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$  группы  $G$  порядка  $m$ , где  $S = S^{-1}$  и  $|S| = s$ . Если  $z$  — целое число, то кратность  $\text{mul}(z)$  числа  $z$  как характеристического корня  $A$ , в связи с тем, что  $A$  — симметрическая матрица, равна размерности  $d(z)$  пространства собственных векторов матрицы  $A - zE$ , где  $E$  — единичная матрица размерности  $m$ , которая в свою очередь равна  $m - r(z)$ , где  $r(z)$  — ранг матрицы  $A - zE$ .

По [89] характеристические корни  $A$  расположены в промежутке  $[-s; s]$ , поэтому за конечное число шагов можно найти все целые характеристические корни  $z_1, \dots, z_t$  матрицы  $A$  и их кратности. Очевидно, граф  $\Gamma$  является целочисленным тогда и только тогда, когда  $z_1 + \dots + z_t = m$ .

Пусть  $G = A_4$ ,  $R = \{(123), (124)\}$ . Поскольку  $R \neq R^{-1}$ , заменим  $R$  на  $S = R \cup R^{-1} = \{(123), (132), (124), (142)\}$ . Получившийся граф Кэли будет иметь вид как на рис. 2.1.

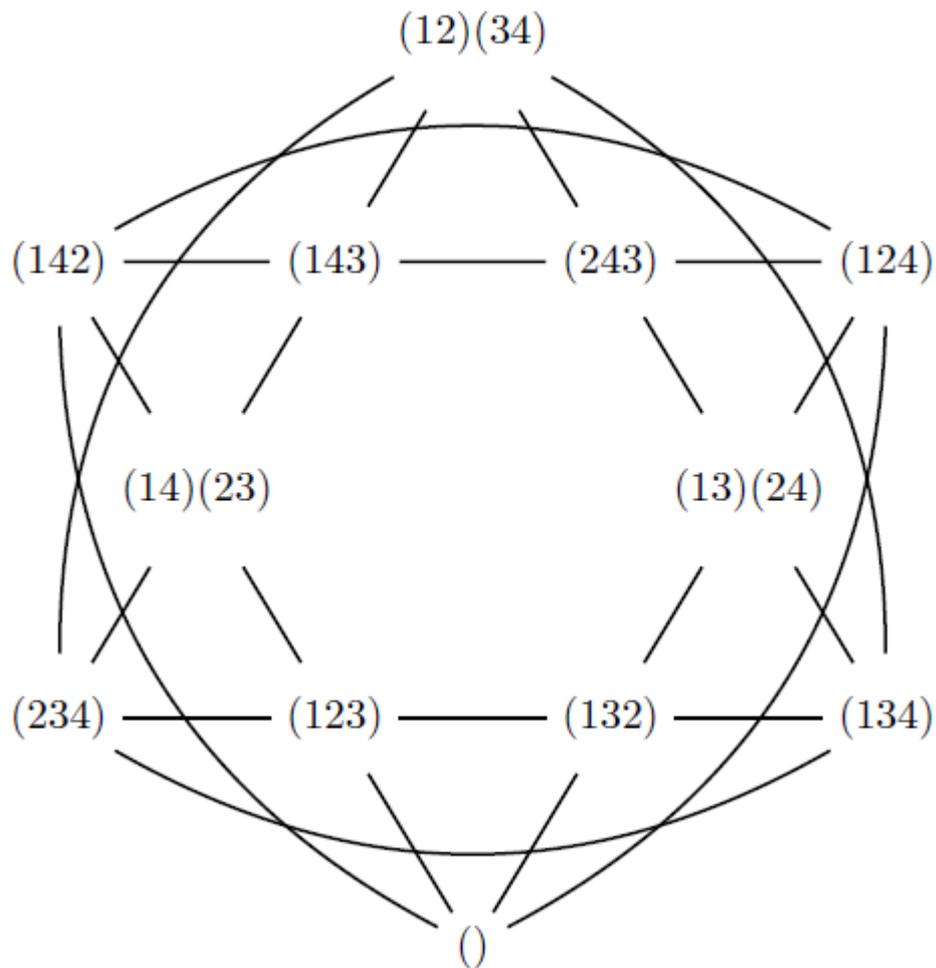


Рисунок 2.1

Его матрица смежности  $A$  при естественной нумерации вершин сверху вниз и слева направо равна:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином  $p$  матрицы  $A$  равен

$$\begin{aligned} p(x) &= x^{12} - 24x^{10} - 16x^9 + 192x^8 + 192x^7 - 640x^6 - 768x^5 + 768x^4 + 1024x^3 = \\ &= (x - 4)(x - 2)^3(x + 4)(x - 2)^5x^3. \end{aligned}$$

Спектр матрицы  $A$  равен  $(4)^1, (2)^3, (0)^3, (-2)^5$ . Эта запись означает, что кратности корней  $4, 2, 0, -2$  равны соответственно  $1, 3, 3, 5$ . Поскольку их сумма равна  $12 = |A_4|$ , то граф целочисленный.

Приведенный пример показывает, что определение спектра графа даже со сравнительно небольшим числом вершин представляет из себя серьёзную вычислительную задачу.

Эта схема была запрограммирована с использованием пакета GAP [12], в котором реализована целочисленная арифметика, допускающая точные (не приближённые) вычисления с целыми числами, длины десятичных записей которых могут быть произвольно большими.

## 2.2 Реализация алгоритма

Приведённую в примере из предыдущего раздела схему определения целочисленности графа Кэли требовалось реализовать в общем виде: для произвольных групп и их копредставлений. Поэтому алгоритм был разбит на несколько частей.

1. Программа реализует алгоритм определения целочисленной части спектра графа Кэли конечной группы на заданном наборе порождающих. Программа принимает на вход два аргумента. Первый аргумент — это путь до файла, в котором будет храниться первый список: множество элементов группы. Второй аргумент — это путь до файла, в котором будет храниться второй список: множество элементов группы, которое замкнуто относительно операции умножения. По определению группа замкнута относительно операции, поэтому к порождающим элементам мы должны добавить их обратные, их произведения в прямом и обратном порядке, произведение обратных и т.д. Всего из этих элементов в результате этих действий получатся все элементы группы. На этом этапе используется система компьютерной алгебры GAP, а именно, алгоритм перечисления смежных классов (алгоритм перечисления смежных классов описан в главе 3, раздел 3.2). Первоначальные исследования касались графов Кэли знакопеременной и симметрической групп. Поэтому для реализации алгоритма перечисления смежных классов возникла необходимость нахождения множеств определяющих соотношений для различных наборов порождающих этих групп. Это исследование носило чисто теоретический характер и описано в главе 3, разделе 3.1.
2. Построение графа Кэли по заданному набору порождающих. Вершинами графа являются элементы группы (из первого списка), и элемент  $g$  соединён ребром в точности с теми элементами, которые получаются умножением  $g$  на элемент из  $S$  (из второго списка).
3. Построение матрицы смежности полученного графа Кэли.
4. Как уже говорилось, характеристические корни графа Кэли лежат в промежутке  $[-s; s]$ , где  $s$  — мощность порождающего множества. По-

этому следующим этапом реализации алгоритма была проверка одного за другим целых чисел из этого промежутка. Требовалось определить, является ли данное число  $z \in [-s; s]$  корнем характеристического многочлена и, если является, то какой кратности. Эта процедура сводится к определению ранга матрицы  $A - zE$ . Несмотря на кажущуюся простоту, эта задача является достаточно сложной, особенно с ростом порядка группы, а следовательно, и количества вершин графа Кэли. Дело в том, что для точного определения ранга целочисленной матрицы требуется использовать алгоритмы без деления. В качестве такого алгоритма был использован алгоритм Гаусса без деления (описан в главе 3, раздел 3.3). Итак, для каждого целого числа из промежутка  $[-s; s]$  определяется, является ли оно корнем характеристического многочлена. Одновременно определяется его кратность. Если кратности собственных значений в сумме составляют размерность матрицы, то граф является целочисленным.

5. Определение диаметра с помощью алгоритма Дейкстры для всех наборов порождающих упомянутых групп.
6. На выходе программы получаем данные о целочисленной части спектра, целочисленного графа и его диаметре (среднем диаметре).

Программа состоит из трёх файлов:

1. MAIN.PY [A.1] – Основная программа, вызывающая последовательность функций для определения целочисленной части спектра.
2. INTEGRAL\_SPECTRUM\_CALCULATION.PY [A.2] – файл, который содержит набор функций для умножения элементов группы на наборы порождающих, построения матрицы смежности, вычисления рангов, определения собственного значения матрицы смежности и одновременно определение его кратности, вывода спектра, определения, является ли спектр целочисленным.
3. GAP\_MANAGEMENT.PY [A.3] – файл, который содержит функции для работы с системой компьютерной алгебры GAP.

Реализация программного кода указана в приложении.

## Глава 3. Теоретические построения, необходимые для реализации алгоритма

### 3.1 Представления симметрической группы и знакопеременной группы

Группы подстановок являются одним из основных комбинаторных объектов с большим числом симметрий, и их всестороннее изучение является задачей, имеющей важные приложения в комбинаторике и ее прикладных аспектах (теории кодирования, криптографии, проектировании электронной техники и т.д.).

В этом разделе приведен способ нахождения определяющих соотношений для хорошо известных систем образующих групп всех подстановок конечных множеств. Это дает возможность в некоторых случаях найти без особых вычислительных сложностей большие подгруппы симметрий для графов с большим числом вершин. Приводится пример применения полученных результатов к нахождению группы симметрий некоторого графа степени 10.

#### 3.1.1 Предварительные сведения

##### Предложение 1 [104].

Пусть  $S_n$  — симметрическая группа подстановок степени  $n$ .

1. Любая подстановка из  $S_n$  представляется в виде произведения независимых циклов.
2. Любая подстановка из  $S_n$  представляется в виде произведения транспозиций (циклов длины 2).
3. Пусть  $a_1 = (12), a_2 = (13), \dots, a_{n-1} = (1n)$ . Тогда  $S_n = \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$ .
4. Пусть  $b_1 = (12), b_2 = (23), \dots, b_{n-1} = (n-1, n)$ . Тогда  $S_n = \langle b_1, \dots, b_{n-1} \rangle$ .
5. Пусть  $c_1 = (12 \dots n), c_2 = (12)$ . Тогда  $S_n = \langle c_1, c_2 \rangle$ .
6. Пусть  $d_1 = (12), d_2 = (23 \dots n)$ . Тогда  $S_n = \langle d_1, d_2 \rangle$ .

Доказательство.

Утверждения пп. 1–2 общеизвестны.

3. Поскольку  $S_n$  порождается транспозициями, утверждение сразу следует из следующего равенства:  $(i, j) = (1, i)(1, j)(1, i)$ .

4. В силу п. 3  $S_n = \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$ , где  $a_1 = (12)$ ,  $a_2 = (13)$ ,  $\dots$ ,  $a_{n-1} = (1n)$ . Таким образом, любая подстановка из  $S_n$  представляется в виде произведения элементов  $a_i$ . Поэтому нам достаточно найти выражение для произвольного  $a_i$  в виде произведения  $b_i$ . Имеем:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1, \\ a_i &= (1, i+1) = (i, i+1)(1, i)(i, i+1) = \\ &= b_i b_{i-1} (1, i-1) b_{i-1} b_i = \dots = b_i b_{i-1} \dots b_2 b_1 b_2 \dots b_{i-1} b_i, \\ &\text{где } i = 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

5. Снова в силу п. 3 достаточно найти выражение для произвольного  $a_i$  в виде произведения  $c_1$  и  $c_2$ . Легко понять, что

$$a_1 = c_2, a_i = (c_1, c_2)^{n-1-i} (c_1 c_2 c_1^{-1}) (c_1 c_2)^{1-n+i}, \quad \text{где } i = 2, \dots, n-1$$

6. Для доказательства достаточно заметить, что  $c_1 = d_2 d_1$ ,  $c_2 = d_1$ . В частности,

$$\begin{aligned} a_1 &= d_1, \\ a_i &= d_2^{n-i} d_1 d_2^{i-n}, \quad \text{где } i = 2, \dots, n-1 \end{aligned}$$

## Предложение 2 [105].

Пусть  $A_n$  — знакопеременная группа подстановок степени  $n \geq 3$ .

1. Любая подстановка из  $A_n$  представляется в виде произведения циклов длины 3. Иными словами,  $A_n$  порождается всеми циклами длины 3.
2.  $A_n$  порождается циклами длины 3 вида  $(1ij)$ , где  $i \neq j$ ,  $i, j > 2$ .
3. Пусть  $e_1 = (123)$ ,  $e_2 = (124)$ ,  $e_3 = (125), \dots$ ,  $e_{n-1} = (1, 2, n)$ . Тогда  $A_n = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ .

4. Пусть  $g_1 = (123)$ ,  $g_2 = (234)$ ,  $g_3 = (345), \dots, g_{n-2} = (n-2, n-1, n)$ . Тогда  $A_n = \langle g_1, \dots, g_{n-2} \rangle$ .
5. Пусть  $k_1 = (123)$ ,  $k_2 = (134)$ ,  $k_3 = (145), \dots, k_{n-2} = (1, n-1, n)$ . Тогда  $A_n = \langle k_1, \dots, k_{n-2} \rangle$ .
6. Пусть  $l_1 = (123)$ ,  $l_2 = (12)(34)$ ,  $l_3 = (12)(45), \dots, l_{n-1} = (12)(n-1, n)$ . Тогда  $A_n = \langle l_1, l_{n-1} \rangle$ .

Доказательство.

1. Единицу группы  $A_n$  можно представить как  $(123)^3$ , что является произведением циклов длины 3. Пусть теперь  $\sigma$  — нетривиальный элемент из  $A_n$ . Запишем его как произведение транспозиций из  $S_n$ :  $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r$ . Число множителей  $r$  чётно. Без ограничения общности можно считать, что соседние транспозиции не равны друг другу. Если транспозиции  $\tau_i$  и  $\tau_{i+1}$  имеют один общий элемент, назовем его  $a$ , то  $\tau_i = (ab)$  и  $\tau_{i+1} = (ac)$ , где  $b \neq c$ . Тогда  $\tau_i \tau_{i+1} = (ab)(ac) = (acb)$  является циклом длины 3. Если транспозиции  $\tau_i$  и  $\tau_{i+1}$  независимы, то  $n \geq 4$  и  $\tau_i = (ab)$ ,  $\tau_{i+1} = (cd)$ , где элементы  $a, b, c, d$  разные. Следовательно, мы можем записать  $\tau_i \tau_{i+1} = (ab)(cd) = (ab)(bc)(bc)(cd) = (bca)(cdb) = (abc)(bcd)$ , что является произведением циклов длины 3.
2. В силу п.1  $A_n$  порождается всеми циклами длины 3. Для любого тройного цикла  $(ijk)$ , не содержащего 1, мы имеем  $(ijk) = (1ij)(1jk)$ .
3. Поскольку  $A_n$  порождается циклами длины 3 вида  $(1ij)$ , где  $i \neq j$ ,  $i, j > 2$  (см. п. 2), то нам достаточно найти выражение для произвольного  $(1ij)$  в виде произведения  $e_i$ . Мы имеем  $(1ij) = (12j)(12i)(12j)(12j)$ .
4. Поскольку  $A_n = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$  (см. п. 3), то нам достаточно найти выражение для произвольного  $e_i$  в виде произведения  $g_i$ . Прямые вычисления показывают, что  $e_i = g_1 g_2 g_3 \dots g_i \dots g_3^{-1} g_2^{-1} g_1^{-1}$ .
5. Снова в силу п. 3 достаточно найти выражение для произвольного  $e_i$  в виде произведения  $k_i$ . Легко понять, что  $e_i = k_1 k_2 \dots k_i$ .
6. Поскольку  $A_n = \langle g_1, \dots, g_{n-2} \rangle$  (см. п. 4), то нам достаточно найти выражение для произвольного  $g_i$  в виде произведения  $l_i$ . Мы имеем  $g_1 = l_1$ ,  $g_2 = (l_1 l_2)^2$ ,  $g_i = (i, i+1, i+2) = l_1 l_i l_1 l_{i-1}$ .

Заметим, что для доказательства п. 6 мы могли найти выражение для произвольного  $k_i$  в виде произведения  $l_i$  и сослаться на п. 5. Имеем:  $k_1 = l_1$ ,  $k_i = (1, i+1, i+2) = l_i k_1 k_2, \dots, k_{i-1}$ .

### Предложение 3 [106].

Пусть  $G = \langle x_1, \dots, x_m \mid R \rangle$ , где  $\{x_1, \dots, x_m\}$  — порождающее множество,  $R = \{v_1(x_1, \dots, x_m), \dots, v_s(x_1, \dots, x_m)\}$  — набор определяющих соотношений группы  $G$ .

Предположим, что  $X = \{y_1, \dots, y_n\}$ ,  $G = \langle X \rangle$  и  $x_i = w_i = w_i(y_1, \dots, y_n)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $y_i = u_i = u_i(x_1, \dots, x_m)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда  $G \simeq \langle y_1, \dots, y_n \mid S \rangle$ , где  $S = \{v_1(w_1, \dots, w_m), \dots, v_s(w_1, \dots, w_m), u_1(w_1, \dots, w_m)y_1^{-1}, \dots, u_n(w_1, \dots, w_m)y_n^{-1}\}$ .

Доказательство. Пусть  $H = \langle y_1, \dots, y_n \mid S \rangle$ . Соотношения  $S$  выполнены для  $y_1, \dots, y_n$ , поэтому  $G$  — гомоморфный образ  $H$ . Если теперь выразить  $x_i$  через  $y_1, \dots, y_n$ , т.е. вместо  $w_i$  написать  $x_i$ , то полученная подгруппа из  $H$  (на самом деле она совпадает с  $H$ ) будет гомоморфным образом  $G$ . Поэтому  $G \simeq H$  и  $S$  — определяющие соотношения в алфавите  $y_1, \dots, y_n$ .

### 3.1.2 Определяющие соотношения

**Теорема 4 [104].** Симметрическая группа  $S_n$  имеет следующие копредставления:

$$1. \langle x_1, \dots, x_{n-1} \mid x_i^2 = (x_i x_{i+1})^3 = (x_i x_j)^2 = 1, \text{ где } |j - i| \geq 2, 2 \leq i \leq n - 1 \rangle;$$

$$2. \langle x_1, \dots, x_{n-1} \mid x_i^2 = (x_{i-1} x_{i+1})^3 = (x_i^{x_{i-1}} x_j^{x_{j-1}})^2 = \\ = (x_i x_{i+1})^3 = 1, \text{ где } |j - i| \geq 2, 1 \leq i, j \leq n - 1 \rangle;$$

$$3. \langle x_1, x_2 \mid x_2^2 = [x_1 x_2 x_1^{-1}, (x_1 x_2)^2]^3 = [x_1, x_2]^3 = [x_2^{x_1}, (x_1 x_2)^{j-i}]^2 = \\ = x_1^n = (x_1 x_2)^{n-1} = 1, \text{ где } |j - i| \geq 2, 1 \leq i, j \leq n - 1 \rangle;$$

$$4. \langle x_1, x_2 \mid x_1^2 = [x_1, x_2^2]^3 = [x_1, x_2]^3 = [x_1^{x_2 x_1}, x_2^{j-i}]^2 = x_2^{n-1} = (x_1 x_2^{-1})^n = 1, \\ \text{ где } |j - i| \geq 2, 1 \leq i, j \leq n - 1 \rangle.$$

Доказательство.

1. Положим  $b_i = (i, i+1) \in S_n, i = 1, \dots, n-1$ . Очевидно, что соотношения группы  $G_n$  выполняются для  $B = \langle b_i \mid i = 1, \dots, n-1 \rangle$ . Так как по п. 4 предложения 1  $B \simeq S_n$ , то отображение  $\theta : x_i \rightarrow b_i, i = 1, \dots, n-1$ , продолжается до сюръективного гомоморфизма  $\theta : G_n \rightarrow S_n$ . Таким образом,  $|G_n| \geq |S_n| = n!$ . Докажем, что  $G_n \leq n!$ , используя индукцию по  $n$ . При  $n = 1, 2, 3$  утверждение тривиально:  $S_3 = \langle x_1, x_2 \mid x_1^2 = x_2^2 = (x_1 x_2)^3 = 1 \rangle$ .

Предположим, что  $G_n \leq n!$ , и докажем, что  $|G_{n+1}| \leq (n+1)!$ . Положим  $H = \langle x_2, \dots, x_n \rangle \leq G_{n+1}$ . Очевидно,  $H \simeq G_n$ , поэтому  $|H| \leq n!$ . Остается доказать, что  $|G_n : H| \leq n+1$ . Заметим, что  $\theta(H) \simeq S_n$  является стабилизатором 1 в  $S_{n+1}$ . Выберем представители  $g_0, \dots, g_n$  смежных классов  $G_n$  по  $H$  так, чтобы  $\theta(g_0), \dots, \theta(g_n)$  отображали 1 в  $1, 2, \dots, n+1$  соответственно. Положим  $\theta(g_i) = b_1 \dots b_i$ . Тогда  $1^{\theta(g_i)} = 1^{b_1 \dots b_i} = i+1$ . Положим  $g_0 = 1, g_i = x_1 x_2 \dots x_i$ , т.е.  $g_i = g_{i-1} x_i$ . Пусть  $S = \bigcup_{i=0}^n H_{g_i}$ . Необходимо доказать, что  $S = G_n$ . Достаточно показать, что  $g_i x_j \in S$  для любых  $i, j$ .

Случай 1. Если  $j > i+1$ , то  $g_i x_j = x_j g_i \in S$  (так как  $x_j \in H$ ).

Случай 2. Если  $j = i+1$ , то  $g_i x_j = g_{i+1} \in S$ .

Случай 3. Если  $j = i$ , то  $g_i x_j = g_{i-1} \in S$ .

Случай 4. Пусть  $j < i$ . Докажем индукцией по  $i-j$ , что  $g_i x_j = x_{j+1} g_i \in S$  для  $x_{j+1} \in H$ .

База индукции:  $i-j = 1$  (тогда  $i \geq 2$  и  $j = i-1$ ). В этом случае  $g_i x_j = g_{i-2} x_{i-1} x_i x_{i-1} = g_{i-2} x_i x_{i-1} x_i = x_i g_{i-2} x_{i-1} x_i = x_i g_i = x_{j+1} g_i$ .

Шаг индукции: если  $i-j > 1$ , то  $g_i x_j = g_{i-1} x_i x_j = g_{i-1} x_j x_i = x_{j+1} g_{i-1} x_i = x_{j+1} g_i$ .

Таким образом,  $G_n = S$ , откуда  $|G_n : H| \leq n + 1$  и  $|G_n| \leq (n + 1)!$ , т.е.  $\theta$  является изоморфизмом.

2. Пусть  $a_i$  и  $b_i$  — подстановки, определенные в пп. 3 и 4 предложения 1. Напомним, что  $a_1 = b_1$ ,  $a_i = b_i b_{i-1} \dots b_2 b_1 b_2 \dots b_{i-1} b_i$ ,  $i = 2, \dots, n - 1$ .

Имеем  $w_1 = b_1 = a_1$ ,  $w_i = b_i = (i, i + 1) = (1, i)(1, i + 1)(1, i) = a_{i-1} a_i a_{i-1} = a_i^{a_{i-1}}$ ,  $i = 2, \dots, n - 1$ .

По пункту 1  $S_n = \langle b_1, \dots, b_{n-1} \mid b_i^2 = (b_i b_{i+1})^3 = (b_i b_j)^2 = 1 \rangle$ . Выразим слова  $v_1 = b_i^2$ ,  $v_2 = (b_i b_{i+1})^3$ ,  $v_3 = (b_i b_j)^2$  через  $a_i$ :

$$1) v_1 = b_i^2 = (a_i^{a_{i-1}})^2 = 1, \text{ так как } a_i^2 = 1.$$

2)  $v_2 = (b_i b_{i+1})^3 = ((a_{i-1} a_i a_{i-1})(a_i a_{i+1} a_i))^3$ . Преобразуя это выражение, с учетом того, что  $(a_i a_{i+1})^3 = 1$ , получаем определяющее соотношение  $(a_{i-1} a_{i+1})^3 = 1$ .

$$3) v_3 = (b_i b_j)^2 = (a_i^{a_{i-1}} a_j^{a_{j-1}})^2, \text{ где } |j - i| \geq 2.$$

Теперь вычислим слова  $u_1(w_1, \dots, w_{n-1}) a_1^{-1}$  и  $u_i(w_1, \dots, w_{n-1}) a_i^{-1}$ .

$$1) u_1(w_1, \dots, w_{n-1}) a_1^{-1} = a_1 a_1^{-1} = 1.$$

2) Учитывая соотношения  $(a_i a_{i+1})^3 = 1$ , получим, что

$$u_i(w_1, \dots, w_{n-1}) a_i^{-1} = a_i^{a_{i-1}} a_{i-1}^{a_{i-2}} \dots a_1 a_2 a_1 a_2 a_1 \dots a_{i-1}^{a_{i-2}} a_i^{a_{i-1}} a_i = 1, \text{ где } i = 2, \dots, n - 1.$$

Действительно, легко показать по индукции, что  $u_k(w_1, \dots, w_{n-1}) = a_{k-1} a_k a_{k-1} a_k a_{k-1}$ .

Остается применить предложение 3.

3. Пусть теперь  $a_i$  и  $c_i$  — подстановки из пп. 3 и 5 предложения 1. Несложно понять, что  $a_1 = c_2$ ,  $a_i = (c_1, c_2)^{n-1-i} (c_1 c_2 c_1^{-1}) (c_1 c_2)^{1-n+i}$  для  $i > 1$  и  $c_1 = a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ ,  $c_2 = a_1$ . Выразим слова  $v_1 = a_i^2$ ,  $v_2 = (a_{i-1} a_{i+1})^3$ ,  $v_3 = (a_i a_{i+1})^3$ ,  $v_4 = (a_i^{a_{i-1}} a_j^{a_{j-1}})^2$  через  $c_1, c_2$ :

$$1) v_1 = a_i^2 = ((c_1 c_2)^{n-1-i} (c_1 c_2 c_1^{-1}) (c_1 c_2)^{1-n+i})^2 = 1, \text{ так как } c_2^2 = 1.$$

$$2) v_2 = (a_{i-1} a_{i+1})^3 = ((c_1 c_2)^{n-i} (c_1 c_2 c_1^{-1}) (c_1 c_2)^{i-n} (c_1 c_2)^{n-2-i} (c_1 c_2 c_1^{-1}) (c_1 c_2)^{2-n+i})^3$$

Преобразуя это выражение, получаем определяющее соотношение  $[c_1 c_2 c_1^{-1}, (c_1 c_2)^2]^3 = 1$ .

$$3) v_3 = (a_{i+1} a_i)^3 = ((c_1 c_2)^{n-2-i} (c_1 c_2 c_1^{-1}) (c_1 c_2)^{2-n+i} (c_1 c_2)^{n-1-i} (c_1 c_2 c_1^{-1}) (c_1 c_2)^{1-n+i})^3$$

После преобразования этого выражения получаем определяющее соотношение  $[c_1, c_2]^3 = 1$ .

$$4) v_4 = (a_i^{a_{i-1}} a_j^{a_{j-1}})^2 = ((c_1 c_2)^{n-i} (c_1 c_2 c_1^{-1}) (c_1 c_2)^{i-n} (c_1 c_2)^{n-1-i} (c_1 c_2 c_1^{-1}) (c_1 c_2)^{1-n+j} \cdot (c_1 c_2 c_1^{-1}) (c_1 c_2)^{i-n} (c_1 c_2)^{n-j} (c_1 c_2 c_1^{-1}) (c_1 c_2)^{j-n} (c_1 c_2)^{n-1-j} (c_1 c_2 c_1^{-1}) (c_1 c_2)^{1-n+j} (c_1 c_2)^{n-j} \cdot (c_1 c_2)^{j-n})^2.$$

После преобразования этого выражения получаем определяющее соотношение

$$[c_2^{c_1}, (c_1 c_2)^{j-i}]^2 = 1, \text{ где } |j - i| \geq 2.$$

Теперь вычислим значение слов  $u_1(w_1, \dots, w_{n-1})c_1^{-1}$  и  $u_2(w_1, \dots, w_{n-1})c_2^{-1}$ .

1)  $u_1(w_1, \dots, w_{n-1})c_1^{-1} = a_1 a_2 \dots a_{n-1} c_1^{-1}$ . После преобразований, с учетом соотношения  $c_1^n = 1$ , получаем определяющее соотношение  $(c_1 c_2)^{n-1} = 1$ .

2)  $u_2(w_1, \dots, w_{n-1})c_2^{-1} = a_1 c_2^{-1} = c_2 c_2^{-1} = 1$ .

Остается применить предложение 3.

4. Пусть теперь  $a_i$  и  $d_i$  — подстановки из пп. 3 и 6 предложения 1. Несложно понять, что  $a_1 = d_1$ ,  $a_i = d_2^{n-i} d_1 d_2^{i-n}$ , где  $i > 1$ , и  $d_1 = a_1$ ,  $d_2 = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_1^{-1}$ . Аналогично доказательству предыдущих пунктов выразим слова  $v_1 = a_i^2$ ,  $v_2 = (a_{i-1} a_{i+1})^3$ ,  $v_3 = (a_i a_{i+1})^3$ ,  $v_4 = (a_i^{a_{i-1}} a_j^{a_{j-1}})^2$  через  $d_1$ ,  $d_2$ :

1)  $v_1 = a_i^2 = (d_2^{n-i} d_1 d_2^{i-n})^2 = 1$ , так как  $d_1^2 = 1$ .

2)  $v_2 = (a_{i-1} a_{i+1})^3 = (d_2^{n-i+1} d_1 d_2^{i-1-n} d_2^{n-i-1} d_1 d_2^{i+1-n})^3$ . Преобразуя это выражение, получаем определяющее соотношение  $[d_1, d_2^2]^3 = 1$ .

3)  $v_3 = (a_{i+1} a_i)^3 = (d_2^{n-i-1} d_1 d_2^{i+1-n} d_2^{n-i} d_1 d_2^{i-n})^3$ . Преобразуя это выражение, получаем определяющее соотношение  $[d_1, d_2]^3 = 1$ .

4)  $v_4 = (a_i^{a_{i-1}} a_j^{a_{j-1}})^2 =$   
 $= (d_2^{n-i+1} d_1 d_2^{i-1-n} d_2^{n-i} d_1 d_2^{i-n} d_2^{n-i+1} d_1 d_2^{i-1-n} d_2^{n-j+1} d_1 d_2^{j-1-n} d_2^{n-j} d_1 d_2^{j-n} d_2^{n-j+1} d_1 d_2^{j-1-n})^2$

Преобразуя это выражение, получаем определяющее соотношение  $[d_1^{d_2 d_1}, d_2^{j-i}]^2 = 1$ , где  $|j - i| \geq 2$ .

Теперь выразим слова  $u_1(w_1, \dots, w_{n-1})d_1^{-1}$  и  $u_2(w_1, \dots, w_{n-1})d_2^{-1}$ .

1)  $u_1(w_1, \dots, w_{n-1})d_1^{-1} = a_1 d_1^{-1} = d_1 d_1^{-1} = 1$ .

2)  $u_2(w_1, \dots, w_{n-1})d_2^{-1} = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_1^{-1} d_2^{-1}$ . После преобразований, с учетом соотношения  $d_2^{n-1} = 1$ , получаем определяющее соотношение  $(d_1 d_2^{-1})^n = 1$ .

Остается применить предложение 3.

Теорема 4 доказана.

**Теорема 5 [105].** Знакопеременная группа  $A_n$  имеет следующие копредставления:

$$1. \langle x_1, \dots, x_{n-2} \mid x_1^3 = x_i^2 = (x_i x_{i+1})^3 = (x_i x_j)^2 = 1, \text{ где } |j-i| \geq 2, 2 \leq i, j \leq n-2 \rangle;$$

$$2. \langle x_1, \dots, x_{n-2} \mid x_i^3 = (x_{i+1} x_i x_{i-1} \dots x_1 x_{i+1})^2 = [(x_2 x_1 x_3)^2, x_2^{-1}] = (x_{i-1} x_{i+1} x_i)^2 = \\ = (x_i x_{i-1} x_{i+1})^2 = (x_1 x_{i+1} x_i x_{i-1} \dots x_1)^2 = [x_i, x_j] = 1, \text{ где } |j-i| > 3, 1 \leq i, j \leq n-2 \rangle;$$

$$3. \langle x_1, \dots, x_{n-2} \mid x_i^3 = (x_1 x_2 \dots x_i^2)^2 = (x_i^2 x_{i+1}^2)^3 = (x_i^2 x_{i+1} \dots x_j^2)^2 = 1, \\ \text{ где } |j-i| > 3, 1 \leq i, j \leq n-2 \rangle;$$

$$4. \langle x_1, \dots, x_{n-2} \mid x_i^3 = (x_i x_j)^2 = 1, \text{ где } |j-i| > 3, 1 \leq i, j \leq n-2 \rangle;$$

$$5. \langle x_1, \dots, x_{n-2} \mid x_i^3 = (x_1 x_2 \dots x_i)^3 = ((x_1 x_2 \dots x_i)^2 (x_{i+1} \dots x_j))^2 = 1, \\ \text{ где } |j-i| > 3, 1 \leq i, j \leq n-2 \rangle;$$

$$6. \langle x_1, \dots, x_{n-2} \mid x_i^3 = (x_1 x_2 \dots x_i \dots x_2^{-1} x_1^{-1})^3 = (x_i x_{i+1} \dots x_j \dots x_{i+1}^{-1})^2 = \\ = (x_{i-1} x_i x_{i+1} x_i^{-1})^2 = [x_i, x_j] = 1, \text{ где } |j-i| > 3, 1 \leq i, j \leq n-2 \rangle.$$

Доказательство.

1. Доказательство п. 1 можно найти в [99], но мы приведем его здесь для полноты изложения.

Покажем, что знакопеременная группа  $A_n$  порождается элементами  $s_i$ ,  $1 \leq i \leq n-2$ , удовлетворяющим следующим соотношениям:  $s_1^3 = s_i^2 = 1$ ,  $(s_i s_{i+1})^3 = 1$ ,  $(s_i s_j)^2 = 1$ , где  $|j-i| \geq 2$ ,  $2 \leq i, j \leq n-2$ .

Достаточно рассмотреть случай  $i + 1 < j$ . Пусть  $s_1 = (123)$  и  $s_i = (12)(i + 1, i + 2)$ ,

$2 \leq i \leq n - 2$ . Очевидно, что  $s_i$  принадлежат  $A_n$  и удовлетворяют указанным соотношениям. Докажем, что они порождают  $A_n$ .

Для  $n = 3$  это тривиально, так как  $A_3 = \langle s_1 \rangle$ . Предположим, что  $\langle s_1, \dots, s_{n-3} \rangle$  порождают знакопеременную группу степени  $n - 1$ . Покажем, что для любого  $j$  существует такое  $g \in A_n$ , что  $n^g = j$ . Для  $j = n$  искомое  $g$  является произведением  $s_i$ , где  $1 \leq i \leq n - 3$ , что и требовалось доказать.

Если  $j < n$ , то существует подстановка  $t$ , которая равна произведению  $s_i$ , где  $1 \leq i \leq n - 3$ , такая, что  $n^{gt} = j^t = n - 1$ . Отсюда следует, что  $n^{gts_{n-1}} = n$  и, таким образом,  $gts_{n-2} \in \langle s_i, \dots, s_{n-3} \rangle$ .

2. Пусть  $g_i$  и  $l_i$  — подстановки из пп. 4 и 6 предложения 2. Если  $l_1 = (123)$ ,  $l_i = (12)(i + 1, i + 2)$ , то несложно понять, что  $l_1 = g_1$ ,  $l_i = g_{i+1}g_i g_{i-1} \dots g_1 g_{i+1}$  и  $g_1 = l_1$ ,  $g_2 = (l_1 l_2)^2$ ,  $g_i = l_1 l_i l_1 l_{i-1}$ . Выразим слова  $v_1 = l_1^3$ ,  $v_2 = l_i^2$ ,  $v_3 = (l_i l_{i+1})^3$ ,  $v_4 = (l_i l_j)^2$  через  $g_i$ :

$$1) v_1 = l_1^3 = g_1^3 = 1, \text{ так как } g_1^3 = 1.$$

$$2) v_2 = l_i^2 = (g_{i+1}g_i g_{i-1} \dots g_1 g_{i+1})^2 = 1.$$

$$3) v_3 = (l_i l_{i+1})^3 = (g_{i+1}g_i g_{i-1} \dots g_1 g_{i+1} g_{i+2} g_{i+1} g_i \dots g_1 g_{i+2})^3 = 1.$$

$$4) v_4 = (l_i l_j)^2 = (g_{i+1}g_i g_{i-1} \dots g_1 g_{i+1} g_{j+1} \dots g_1 g_{j+1})^2 = 1.$$

Теперь вычислим значение слов  $u_1(w_1, \dots, w_{n-1})g_1^{-1}$ ,  $u_2(w_1, \dots, w_{n-1})g_2^{-1}$ ,  $u_i(w_1, \dots, w_{n-1})g_i^{-1}$ .

$$1) u_1(w_1, \dots, w_{n-1})g_1^{-1} = g_1 g_1^{-1} = 1.$$

$$2) u_2(w_1, \dots, w_{n-1})g_2^{-1} = (l_1 l_2)^2 g_2^{-1} = (g_1 g_3 g_2 g_1 g_3)^2 g_2^{-1} = g_1 g_3 g_2 g_1 g_3 g_2^3 g_1 g_3 g_2 g_1 g_3 g_2^{-1} = (g_1 g_3 g_2)^2 g_2 (g_2 g_1 g_3)^2 g_2^{-1} = [(g_2 g_1 g_3)^2, g_2^{-1}] = 1, \text{ с учетом соотношений } (g_{i-1} g_{i+1} g_i)^2 = 1 \text{ и } (g_i g_{i-1} g_{i+1})^2 = 1.$$

$$3) u_i(w_1, \dots, w_{n-1})g_i^{-1} = l_1 l_i l_1 l_{i-1} g_i^{-1} = g_1 g_{i+1} g_i g_{i-1} \dots g_1 g_{i+1} g_1 g_i g_{i-1} \dots g_1 g_i g_i^{-1} = (g_1 g_{i+1} g_i g_{i-1} \dots g_1)^2 = 1. \text{ Учитывая, что } g_i g_j = g_j g_i, [g_i, g_j] = 1, \text{ при } |j - i| > 3.$$

Остается применить предложение 3.

3. Пусть  $k_i$  и  $l_i$  — подстановки из пп. 5 и 6 предложения 2. Если  $l_1 = (123)$ ,  $l_i = (12)(i + 1, i + 2)$ , то несложно понять, что  $l_1 = k_1$ ,  $l_i = k_1 k_2 \dots k_i^2$  и  $k_1 = l_1$ ,  $k_i = (1, i + 1, i + 2) = l_i l_1 k_2 k_3 \dots k_{i-1}$ . Выразим слова  $v_1 = l_1^3$ ,  $v_2 = l_i^2$ ,  $v_3 = (l_i l_{i+1})^3$ ,  $v_4 = (l_i l_j)^2$  через  $k_i$ :

$$1) v_1 = l_1^3 = k_1^3 = 1, \text{ так как } k_1^3 = 1.$$

$$2) v_2 = l_i^2 = (k_1 k_2 \dots k_i^2)^2 = 1.$$

$$3) v_3 = (l_i l_{i+1})^3 = (k_1 k_2 \dots k_i^2 k_1 k_2 \dots k_i k_{i+1}^2)^3 = (k_1 k_2 \dots k_i^2 k_1 k_2 \dots k_i k_i^3 k_{i+1}^2)^3 = (k_i^2 k_{i+1}^2)^3 = 1, \text{ с учетом соотношения } (k_1 k_2 \dots k_i^2)^2 = 1.$$

$$4) v_4 = (l_i l_j)^2 = (k_1 k_2 \dots k_i^2 k_1 k_2 \dots k_i k_{i+1} \dots k_j^2)^2 = (k_1 k_2 \dots k_i^2 k_1 k_2 \dots k_i k_i^3 k_{i+1} \dots k_j^2)^2 = (k_i^2 k_{i+1} \dots k_j^2)^2 = 1, \text{ с учетом соотношения } (k_1 k_2 \dots k_i^2)^2 = 1.$$

Теперь вычислим значение слов  $u_1(w_1, \dots, w_{n-1})k_1^{-1}$  и  $u_i(w_1, \dots, w_{n-1})k_i^{-1}$ .

$$1) u_1(w_1, \dots, w_{n-1})k_1^{-1} = k_1 k_1^{-1} = 1.$$

$$2) u_i(w_1, \dots, w_{n-1})k_i^{-1} = l_i l_1 l_{i-1} l_1 \dots l_2 l_1 k_i^{-1} = 1$$

Остается применить предложение 3.

4. Доказательство п. 4 можно найти в [100].

5. Будем использовать представления из п. 4 предложения 2. Пусть  $k_i$  и  $e_i$  — подстановки из пп. 5 и 3. Если  $e_i = (12i)$ , то несложно понять, что  $e_1 = k_1$ ,  $e_i = k_1 k_2 \dots k_i$  и  $k_1 = e_1$ ,  $k_i = (1, i + 1, i + 2) = e_{i-1}^2 e_i$ . Выразим слова  $v_1 = e_i^3$ ,  $v_2 = (e_i e_j)^2$  через  $k_i$ :

$$1) v_1 = e_i^3 = (k_1 k_2 \dots k_i)^3 = 1.$$

$$2) v_2 = (e_i e_j)^2 = (k_1 k_2 \dots k_i k_1 k_2 \dots k_i k_{i+1} \dots k_j)^2 = ((k_1 k_2 \dots k_i)^2 (k_{i+1} \dots k_j))^2 = 1.$$

Теперь выразим слова  $u_1(w_1, \dots, w_{n-1})k_1^{-1}$  и  $u_i(w_1, \dots, w_{n-1})k_i^{-1}$ .

$$1) u_1(w_1, \dots, w_{n-1})k_1^{-1} = k_1 k_1^{-1} = 1.$$

$$2) u_i(w_1, \dots, w_{n-1})k_i^{-1} = e_{i-1}^2 e_i k_i^{-1} = (k_1 k_2 \dots k_{i-1})(k_1 k_2 \dots k_{i-1})(k_1 k_2 \dots k_{i-1} k_i)k_i^{-1} = 1, \text{ с учетом соотношения } (k_1 k_2 \dots k_{i-1})^3 = 1$$

Остается применить предложение 3.

6. Пусть  $g_i$  и  $e_i$  — подстановки из пп. 4 и 3 предложения 2. Если  $e_i = (12i)$ , то несложно понять, что  $e_1 = g_1$ ,  $e_i = g_1 g_2 g_3 \dots g_i \dots g_3^{-1} g_2^{-1} g_1^{-1}$ , и  $g_1 = e_1$ ,  $g_2 = e_1^2 e_2 e_1$ ,  $g_i = (i, i + 1, i + 2) = e_{i-2}^2 e_{i-1}^2 e_i e_{i-1} e_{i-2}$ . Выразим слова  $v_1 = e_i^3$ ,  $v_2 = (e_i e_j)^2$  через  $g_i$ :

$$1) v_1 = e_i^3 = (g_1 g_2 \dots g_i \dots g_2^{-1} g_1^{-1})^3 = 1, \text{ с учетом соотношения } g_i^3 = 1.$$

$$2) v_2 = (e_i e_j)^2 = (g_1 g_2 \dots g_i \dots g_2^{-1} g_1^{-1} g_1 g_2 \dots g_i g_{i+1} \dots g_j \dots g_{i+1}^{-1} g_i^{-1} \dots g_2^{-1} g_1^{-1})^2.$$

Преобразуя это выражение, получаем определяющее соотношения  $(g_i g_{i+1} \dots g_j \dots g_{i+1}^{-1})^2 = 1$ ,  $(g_{i-1} g_i g_{i+1} g_i^{-1})^2 = 1$ .

Теперь выразим слова  $u_1(w_1, \dots, w_{n-1})g_1^{-1}$ ,  $u_2(w_1, \dots, w_{n-1})g_2^{-1}$ ,  $u_i(w_1, \dots, w_{n-1})g_i^{-1}$ .

$$1) u_1(w_1, \dots, w_{n-1})g_1^{-1} = g_1g_1^{-1} = 1.$$

2)  $u_2(w_1, \dots, w_{n-1})g_2^{-1} = e_1^2e_2e_1g_2^{-1} = g_1^2g_1g_2g_1^{-1}g_1g_2^{-1} = 1$ , с учетом соотношения  $g_i^3 = 1$ .

3)  $u_i(w_1, \dots, w_{n-1})g_i^{-1} = e_{i-2}^2e_{i-1}^2e_ie_{i-1}e_{i-2}g_i^{-1} = g_1 \dots g_{i-4}g_{i-3}g_i^{-1}g_{i-3}g_{i-4}^{-1} \dots g_1^{-1}g_i^{-1} = 1$ , с учетом определяющего соотношения  $g_i g_j = g_j g_i$ ,  $[g_i, g_j] = 1$ , при  $|j - i| > 3$ .

Остается применить предложение 3.

Теорема доказана 5.

### 3.1.3 Пример графа с количеством вершин $n = 10$

Рассмотрим неориентированный граф  $\Gamma$  с вершинами  $0, 1, 2, \dots, 9$  и множеством ребер  $07, 08, 09, 15, 16, 19, 24, 26, 28, 34, 35, 37, 49, 58, 67$  (упрощая обозначения, мы пишем здесь  $\alpha\beta$  вместо  $(\alpha, \beta)$ ).

Его матрица инцидентности равна

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Предложение 4 [104].**

Группа симметрий  $\Gamma$  изоморфна  $S_5$ .

Доказательство. Подстановки  $b_1 = (14)(25)(36)$ ,  $b_2 = (01)(57)(68)$ ,  $b_3 = (12)(45)(89)$ ,  $b_4 = (23)(56)(78)$  вершин графа  $\Gamma$  являются симметриями  $\Gamma$ , в чем легко убедиться, проверив, что подстановочные матрицы, соответствующие

$b_1, b_2, b_3, b_4$ , перестановочны с  $I$ . Простая проверка показывает, что

$$b_1^2 = b_2^2 = b_3^2 = b_4^2 = (b_1 b_2)^3 = (b_2 b_3)^3 = (b_3 b_4)^3 = (b_1 b_3)^2 = (b_1 b_4)^2 = (b_2 b_4)^2 = 1.$$

По п. 1 предложение 1 подгруппа  $B = \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$  является гомоморфным образом группы  $S_5$ . Ясно, что  $|B| > 2$ . Поскольку гомоморфными образами  $S_5$  являются, кроме самой  $S_5$ , только группы порядков 1 и 2, то  $B \simeq S_5$ .

Покажем, что на самом деле  $B$  совпадает со всей группой симметрий  $\Gamma$ . Действительно,  $4 \xrightarrow{b_1} 1 \xrightarrow{b_3} 2 \xrightarrow{b_4} 3 \xrightarrow{b_1} 6 \xrightarrow{b_4} 5 \xrightarrow{b_2} 7 \xrightarrow{b_4} 8 \xrightarrow{b_3} 9$ , поэтому  $B$  транзитивна на вершинах  $\Gamma$ , и следовательно,  $G$  также транзитивна на вершинах  $\Gamma$ . Отсюда индекс стабилизатора  $G_1$  вершины 0 в  $G$  равен 10 и  $G_1$  действует на множестве ребер  $\{07, 08, 09\}$ , инцидентных вершине 0. Порядок стабилизатора любого из множеств  $\{07\}$ ,  $\{08\}$ ,  $\{09\}$  не превосходит числа 2, поэтому  $|G| \leq 10 \cdot |S_3| \cdot |S_2| = 10 \cdot 6 \cdot 2 = 120 = |B|$ .

Предложение 4 доказано.

### 3.2 Алгоритм перечисления смежных классов

Система компьютерной алгебры GAP с помощью алгоритма перечисления смежных классов строит группу по набору порождающих.

Приведем пример из [16] построения группы по набору порождающих для представления  $S_4 = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1, xy = yx \rangle$ . Используем такие порождающие элементы:  $x = (1234)$ ,  $y = (12)$ . Поскольку  $xy = (234)$ , то  $x^4 = 1$ ,  $y^2 = 1$ ,  $(xy)^3 = 1$ .

Поскольку наша группа не очень сложна, разумно предположить, что эти соотношения и достаточны для ее определения. Чтобы доказать это, рассмотрим группу

$$G = \langle x, y \mid x^4 = 1, y^2 = 1, (xy)^3 = 1 \rangle,$$

а в ней какую-нибудь подгруппу, скажем,  $H = \langle x \rangle$ , и постараемся установить, что  $G$  содержит  $|S_4| : 4 = 6$  смежных классов по  $H$ . Тогда будет

$$|G| = |H| \cdot |G : H| = 24,$$

а так как  $G$  имеет  $S_4$  своим гомоморфным образом, то получим искомым изоморфизм  $G \simeq S_4$ .

Начертим в соответствии с определяющими соотношениями группы  $G$  таблицу 3.1 из трех столбцов

Таблица 3.1 Этап 1

$x \ x \ x \ x$	$y \ y$	$x \ y \ x \ y \ x \ y$
1 1 1 1 1	1 1	1 1 1

Перечислим смежные классы  $G$  по  $H$ , обозначив саму  $H$  цифрой 1. Очевидное равенство  $1x = 1$  мы уже внесли во все поля. Положим  $1y = 2$ , тогда как следствие получается  $2y = 1$ . Внесем эти соотношения во все три столбца (табл. 3.2), открыв одновременно в каждом из них новую строку.

Таблица 3.2 Этап 2

$x \ x \ x \ x$	$y \ y$	$x \ y \ x \ y \ x \ y$
1 1 1 1 1	1 2 1	1 1 2 2 1
2 2	2 1 2	2 1 2 1 1 2

Положим, далее,  $2x = 3$ ,  $3x = 4$ . Таблица 3.3 примет следующий вид.

Таблица 3.3 Этап 3

$x \ x \ x \ x$	$y \ y$	$x \ y \ x \ y \ x \ y$
1 1 1 1 1	1 2 1	1 1 2 3 2 1
2 3 4 2	2 1 2	2 3 2 1 1 2
3 4 2 3	3 3	3 4 3
4 2 3 4	4 4	4 4

Пусть теперь  $4x = 5$ , тогда из первого столбца таблицы  $5x = 2$ , из третьего столбца  $3y = 5$  и из второго столбца  $5y = 3$ . Получаем табл. 3.4.

Таблица 3.4 Этап 4

$x \ x \ x \ x$	$y \ y$	$x \ y \ x \ y \ x \ y$
1 1 1 1 1	1 2 1	1 1 2 3 5 2 1
2 3 4 5 2	2 1 2	2 3 5 2 1 1 2
3 4 5 2 3	3 5 3	3 4        4 5 3
4 5 2 3 4	4    4	4 5 3 4        4
5 2 3 4 5	5 3 5	5 2 1 1 2 3 5

Теперь надо положить  $4y = 6$ , и мы получим окончательную таблицу (табл. 3.5).

Таблица 3.5 Этап 5

$x \ x \ x \ x$	$y \ y$	$x \ y \ x \ y \ x \ y$
1 1 1 1 1	1 2 1	1 1 2 3 5 2 1
2 3 4 5 2	2 1 2	2 3 5 2 1 1 2
3 4 5 2 3	3 5 3	3 4 6 6 4 5 3
4 5 2 3 4	4 6 4	4 5 3 4 6 6 4
5 2 3 4 5	5 3 5	5 2 1 1 2 3 5
6 6 6 6 6	6 4 6	6 6 4 5 3 4 6

Все столбцы таблицы закрылись – пересечение смежных классов закончено. Его результат:  $|G : H| = 6$ . Заметим, что на каком-то шаге мы могли и не заметить возможного заполнения некоторых мест, тогда какой-то класс получил бы несколько разных номеров. Таким образом, из закрытия таблиц следует неравенство  $|G : H| \leq 6$ . Так как, однако,  $G$  имеет гомоморфным образом группу  $S_4$ , то строгое неравенство на самом деле невозможно.

Отметим еще, что 3-я, 4-я и 5-я строки первого столбца (табл. 3.5) являются следствиями 2-й строки и их можно было бы вообще не писать; то же относится ко 2-й, 5-й, 6-й строкам второго столбца и 2-й, 4-й, 5-й, 6-й стро-

кам третьего столбца (табл. 3.5). Впрочем, эти и некоторые другие упрощения метода перечисления носят уже технический характер. Добавим только, что описанный метод хорошо поддается программированию для вычислительных машин.

### 3.3 Алгоритм поиска ранга методом Гаусса без деления

Сформулируем метод, основанный на методе Гаусса для решения линейной системы уравнений в проективном пространстве [90]. Метод основан на применении проективного расширения евклидова пространства и использовании однородных координат. Это приводит к исключению операции деления и более высокой точности. Этот подход основан на понимании того, что решение линейной системы  $Ax = b$  эквивалентно расширенному произведению,  $\tilde{x} = a_1 \times \dots \times a_n$ . Как видно, деление не требуется. Использование проективного представления позволяет избежать операции деления и использовать преимущества матрично-векторных архитектур. Операции деления должны использоваться только в том случае, если конечный результат вычисления должен быть в евклидовом представлении.

Существует два основных класса методов решения линейной системы уравнений  $Ax = b$ . Трудоёмкость явных методов, таких как метода Гаусса [90] имеет вычислительную сложность  $O(N^3)$ , а итерационных методов —  $O(KN^2)$ , где  $N$  — размер матрицы,  $K$  — количество итераций. Решение  $Ax = b$  может быть преобразовано в задачу решения однородной системы уравнений  $A\tilde{x} = 0$ , где  $\tilde{x}$  — вектор в проективном пространстве.

Известно, что точность вычислений определяется правилами, связанными с тем, каким образом хранимые значения  $x$  (соответственно  $y$ ) представляют значения из интервалов, например,  $x \in [a, b]$  (соответственно  $y \in [c, d]$ ). Точность операций задается как [91; 95]

$$x + y \in [a + c, b + d], x - y \in [a - d, b - c]$$

$$x \times y = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$$

$$x/y = [\min(a/c, a/d, b/c, b/d), \max(a/c, a/d, b/c, b/d)], \text{ если } y \neq 0.$$

Можно заметить, что операция деления вызывает существенную неточность в вычислениях, за исключением сложения и вычитания с числами со значительно отличающимися показателями. Взаимные преобразования между евклидовым пространством и проективным пространством, т. е. проективное расширение евклидова пространства, задаются как

$$x = \tilde{x}/\tilde{w} \text{ и } y = \tilde{z}/\tilde{w}, \tilde{w} \neq 0$$

где  $[\tilde{x}, \tilde{y} : \tilde{w}]$  — однородные координаты евклидовых координат  $(x, y)$ , определённых геометрически. В математике используется другое обозначение  $\tilde{x} = [\tilde{x}_0 : \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n]$ , где  $\tilde{x}_0$  — однородная координата, т.е. значение  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{x} = \tilde{x}_1$  и  $\tilde{y} = \tilde{x}_2$  и другие. Существуют различные обозначения, первое обозначение распространено в компьютерной графике и связанных с ней областях.

*Метод Гаусса* для решения линейной системы уравнений  $Ax = b$  основан на стратегии постепенной генерации верхнетреугольной матрицы. Когда это сделано, происходит обратный цикл, вычисляющий векторные значения. Метод Гаусса можно описать следующим образом [96]:

## Листинг 3.1 Метод Гаусса

```

for k := 1 to n-1 do
{ # находим текущую строку #
ii := max_arg (abs(a[i, k]), i = k ... n);
if abs(a[ii, k]) <= eps then {ERROR ("Matrix is singular!"); exit }
swap_rows (k, ii); # меняем местами строки k,ii#
# для всех строк ниже текущего элемента (строки)#
for i := k + 1 to n do
{ # для всех остальных элементов в текущей строке #
for j := k + 1 to n+1 do
a[i, j] := a[i, j] - a[k, j] * (a[i, k] / a[k, k]);
# заполнить нижнюю треугольную матрицу нулями, если это необходимо #
a[i, k] := 0 } };
for i := n downto 1 do # обратный цикл #
{ s:=0;
for j := i+1 to k do
s := s + a[i,j] * x[j];
x[i] := (a[i,n+1) - s) / a[i,i]; }

```

Здесь  $a[i, j]$  — элементы расширенной матрицы, то есть матрицы, последний столбец которой является вектором  $b$ . Видно, что существует деление на диагональный элемент  $a[k, k]$ , которое может привести к делению на значение, равное или близкое к нулю. Метод Гаусса с использованием деления имеет вычислительную сложность  $O(N^3)$ .

*Проективная модификация метода Гаусса без деления* применяется для решения линейных задач и заключается в нахождении максимального ведущего элемента для знаменателя, чтобы избежать операции деления на значение, близкое или равное нулю. (Данная модификация позволяет исключить появление чисел с плавающей запятой, тем самым увеличивается точность алгоритма). Можно использовать проективное представление [98; 101; 102]. Рассмотрим следующие структуры данных конструкций:

- проективный скаляр  $\tilde{a} = [a_0 : a]$
- проективный вектор  $\tilde{a} = [a_0 : a_1, \dots, a_n]$

– матрица проективных векторов  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{1,0} & \tilde{a}_{1,1} & \dots & \tilde{a}_{1,n} \\ \tilde{a}_{2,0} & \tilde{a}_{2,1} & \dots & \tilde{a}_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n,0} & \tilde{a}_{n,1} & \dots & \tilde{a}_{n,n} \end{bmatrix}$ , т. е. каждая строка которой является проективным вектором.

Теперь можно сделать проективную переформулировку метода Гаусса линейной системы  $Ax = b$ . Пусть расширенная матрица  $\tilde{A}$ , содержащая вектор  $b$ , определяется как матрица проективных векторов

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{1,0} & \tilde{a}_{1,1} & \dots & \tilde{a}_{1,n} & \tilde{a}_{1,n+1} \\ \tilde{a}_{2,0} & \tilde{a}_{2,1} & \dots & \tilde{a}_{2,n} & \tilde{a}_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{n,0} & \tilde{a}_{n,1} & \dots & \tilde{a}_{n,n} & \tilde{a}_{n,n+1} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\tilde{a}_{1,0}$  — однородное значение для всей  $i$ -й строки (для простоты пусть  $\tilde{a}_{1,0} = 1$  для всех  $i$ ),  $\tilde{a}_{*,n+1}$  представляет вектор  $b$  и  $a_{i,j} = \frac{\tilde{a}_{i,j}}{\tilde{a}_{i,0}}$  для всех  $i, j$ . Вычислительный шаг метода Гаусса может быть модифицирован следующим образом:

$$a_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{i,k}a_{k,j}}{a_{k,k}} = \frac{\tilde{a}_{i,j}}{\tilde{a}_{i,0}} - \frac{\frac{\tilde{a}_{i,k}\tilde{a}_{k,j}}{\tilde{a}_{i,0}\tilde{a}_{k,0}}}{\frac{\tilde{a}_{k,k}}{\tilde{a}_{k,0}}} = \frac{\tilde{a}_{i,j}\tilde{a}_{k,k} - \tilde{a}_{i,k}\tilde{a}_{k,j}}{\tilde{a}_{i,0}\tilde{a}_{k,k}} \triangleq [\tilde{a}_{i,0}\tilde{a}_{k,k} : \tilde{a}_{i,j}\tilde{a}_{k,k} - \tilde{a}_{i,k}\tilde{a}_{k,j}]$$

где  $\triangleq$  означает проективную эквивалентность.

Очевидно, что точность вычисления выше, но показатели имеют тенденцию к увеличению или уменьшению, что может привести к переполнению или недостаточному экспоненциальному показателю. Специальная подпрограмма ”*Normalize\_row\_exponents*” должна быть вызвана в конце вычисления каждой строки. Он вычитает показатель однородного значения  $\tilde{a}_{i,0}$  из других значений  $\tilde{a}_{i,*}$  в данной строке. Следует отметить, что  $\tilde{a}_{i,0}\tilde{a}_{k,k}$  является общим множителем для всей  $i$ -й строки.

## Листинг 3.2 Метод Гаусса без деления

```

for k := 1 to n-1 do # Основной алгоритм - без оптимизации; #
{ ii := max _ arg _ projective (abs(a[i, k]), i = k ... n);
#находим максимальный текущий элемент #
if abs( a[ii,k]) <= eps then {ERROR ("Matrix is singular!"); exit }
  swap_rows (k, ii); # меняет местами строки k, ii #
# for all rows below pivot #
par for i := k+1 to n do
# Этапы цикла могут выполняться параллельно #
{ for j := k+1 to n+1 do
a[i,j] := a[i,j] * a[k,k] - a[i,k] * a[k,j];
a[i,0] := a[i,0] * a[k,k];
# Нормализовать показатели i-й строки в соответствии со значением экспоненты [i, 0] #
Normalize_row_exponents (a[i,j], j = k+1 ... n) }
}; # Это ДОЛЖНО быть сделано полностью в проективном представлении #
for i := n downto 1 do
# Это ДОЛЖНО быть сделано полностью в проективном представлении #
{ s:=0; # Только символический код #
for j := i+1 to k do
s := s + a[i,j] * x[j];
x[i] := (a[i,n+1] - s) / a[i,i]; }

```

Процедура "*max\_arg\_projective*" находит максимальный текущий элемент. Это немного сложно, так как должно быть сделано в проективном представлении и основано на проверке  $a_{i,k} * a_{i+j,0} > a_{i+j,k} * a_{i,0}$ , но деление не требуется.

Предложенная модификация фактически преобразует операцию деления в операцию умножения, и операция деления фактически скрывается в однородной координате.

Метод Гаусса без деления [90] основан на проективном представлении. Предлагаемый подход использует проективное расширение евклидова пространства и вообще исключает операцию деления, которая является самой медленной операцией в представлении с плавающей запятой, за исключением операции сравнения. Предложенная модификация была проверена с помощью обратного вычисления матрицы Гильберта. Были доказаны более высокая точность и ускорение вычислений. Предлагаемая проективная модификация также

удобна для параллельной обработки и использования на аналогичных архитектурах графических процессоров.

## Глава 4. Основные результаты

### 4.1 Целочисленные графы Кэли и их спектры

В этом разделе представлены спектры графов Кэли для следующих видов групп: знакопеременные группы  $A_n$  для  $n = 4, 5, 6, 7, 8$  с различными наборами порождающих; симметрические группы  $S_n$  для  $n = 3, 4, 5, 6$ , порождённые набором всех транспозиций вида  $(ij)$  или набором всех инволюций; группы диэдра  $D_{2n}$  для  $n = 2, 3, \dots, 132$ , порождённые набором всех инволюций; линейные группы  $L_2(n)$  для  $n = 5, 7, 8, 9, 11, 13$ , порождённые набором всех инволюций; все группы порядков, не превосходящих 50, порождённые набором всех инволюций. Полученные результаты приведены в виде таблиц. Колонка «порядок» указывает порядок соответствующей группы. В колонке «спектр» символ  $(n)^k$  означает, что для графа Кэли на данном наборе порождающих число  $n \in \mathbb{Z}$  является собственным значением кратности  $k$ .

Как уже говорилось, первоначальные исследования касались графов Кэли знакопеременных и симметрических групп, но по мере накопления экспериментальных данных появились некоторые гипотезы, которые было решено проверить на группах малых порядков, в том числе, на линейных группах. Кроме этого, доступными для использования разработанного алгоритма группами оказались группы Диэдра.

Полученные результаты приведены в виде таблиц. Колонка «порядок» указывает порядок группы и соответствующего ей графа Кэли. В колонке «спектр» символ  $(n)^k$  означает, что для графа Кэли на данном наборе порождающих число  $n \in \mathbb{Z}$  является собственным значением кратности  $k$ .

Таблица 4.1 [107–110; 112] содержит спектры графов Кэли для  $A_n$  при  $n = 4, 5, 6, 7, 8$ . В последнем столбце знак «+» указывает на то, что соответствующий граф является целочисленным. Таблица 4.2 [111; 112] содержит спектры графов Кэли для симметрических групп  $S_n$  при  $n = 3, 4, 5, 6$ , порождённых набором всех транспозиций вида  $(ij)$  и набором всех инволюций. Все графы из этой таблицы являются целочисленными. В таблице 4.3 перечислены спектры графов Кэли конечных групп, порядки которых не превосходят пятидесяти, где

в качестве набора порождающих рассматривается множество всех инволюций группы. В этой таблице  $C_k$  обозначает циклическую группу порядка  $k$ ,  $Q_8$  — группу кватернионов, « $\times$ » указывает на прямое произведение, « $\cdot$ » — на расщепляемое расширение. Все соответствующие графы являются целочисленными. Таблица 4.4 содержит спектры графов Кэли для линейных групп  $L_2(n)$  при  $n = 5, 7, 8, 9, 11, 13$ , порождённых набором всех инволюций. Все графы из этой таблицы тоже являются целочисленными. Наконец, в таблице 4.5 приводятся спектры графов Кэли диэдральных групп  $D_{2n}$  для  $n = 26, 27, \dots, 132$ , также порождённых множеством всех инволюций. Эти графы тоже целочисленные.

Таблица 4.1 Спектры графов Кэли для  $A_n$  при  $n = 4, 5, 6, 7, 8$

$n$	порядок	набор порождающих	спектр	
$n = 4$	12	(123), (124)	$(-2)^5, (0)^3, (2)^3, (4)^1$	+
		(123), (234)	$(-2)^5, (0)^3, (2)^3, (4)^1$	+
		(123), (134)	$(-2)^5, (0)^3, (2)^3, (4)^1$	+
		(123), (12)(34)	$(-2)^3, (-1)^3, (0)^2,$ $(2)^3, (3)^1$	+
		(123), (124), (134)	$(-3)^2, (-2)^3, (1)^6, (6)^1$	+
$n = 5$	60	(123), (124), (125)	$(-3)^{14}, (-2)^5, (-1)^{12}, (1)^{14},$ $(2)^6, (4)^8, (6)^1$	+
		(123), (234), (345)	$(-3)^{10}, (-1)^{10}, (2)^5, (6)^1$	—
		(123), (134), (145)	$(-3)^{10}, (-1)^{10}, (2)^5, (6)^1$	—
		(123), (12)(34), (12)(45)	$(-3)^4, (-2)^5, (0)^5, (4)^1$	—
		(123), (124), (125), (134), (135), (145)	$(-4)^{15}, (-3)^4, (0)^{28}, (5)^{12},$ $(12)^1$	+
$n = 6$	360	(123), (124), (125), (126)	$(-4)^{42}, (-3)^{48}, (-2)^{39}, (-1)^{32},$ $(0)^{45}, (1)^{48}, (2)^{42}, (4)^{48}, (6)^{15},$ $(8)^1$	+
		(123), (234), (345), (456)	$(-4)^{19}, (-2)^5, (0)^{20}, (1)^5,$ $(2)^{10}, (5)^5, (8)^1$	—
		(123), (134), (145), (156)	$(-4)^5, (-2)^{24}, (0)^{15}, (8)^1$	—
<i>продолжение следует</i>				

Продолжение таблицы 4.1				
$n$	порядок	набор порождающих	спектр	
		(123), (12)(34), (12)(45), (12)(56)	$(-4)^5, (-2)^9, (-1)^{10}, (0)^9,$ $(2)^5, (5)^1$	-
		(123), (124), (125), (126), (134), (135), (136), (145), (146), (156)	$(-5)^{84}, (-4)^{30}, (-1)^{120}, (4)^{105},$ $(11)^{20}, (20)^1$	+
$n = 7$	2520	(123), (124), (125), (126), (127)	$(-5)^{132}, (-4)^{315}, (-3)^{200},$ $(-2)^{294}, (-1)^{120}, (0)^{462}, (1)^{200},$ $(2)^{225}, (3)^{132}, (4)^{255}, (6)^{160},$ $(8)^{24}, (10)^1$	+
		(123), (234), (345), (456), (567)	$(-5)^{28}, (10)^1$	-
		(123), (134), (145), (156), (167)	$(-2)^{21}, (1)^{20}, (10)^1$	-
		(123), (12)(34), (12)(45), (12)(56), (12)(67)	$(-5)^6, (-4)^{15}, (0)^{14}, (5)^6, (6)^1$	-
		(123), (124), (125), (126), (127), (134), (135), (136), (137), (145), (146), (147), (156), (157), (167)	$(-6)^{420}, (-5)^{468}, (-2)^{495},$ $(3)^{830}, (10)^{276}, (19)^{30}, (30)^1$	+
$n = 8$	20160	(123), (124), (125), (126), (127), (128)	$(-6)^{429}, (-5)^{1760}, (-4)^{1719},$ $(-3)^{1792}, (-2)^{1350}, (-1)^{2112},$ $(0)^{2730}, (1)^{1792}, (2)^{1152}, (3)^{1760},$ $(4)^{1624}, (6)^{1514}, (8)^{390}, (10)^{35},$ $(12)^1$	+

Таблица 4.2 Спектры графов Кэли для групп  $S_n$  при  $n = 3, 4, 5, 6$ 

группа	порядок	набор порождающих	спектр
$S_3$	6	все транспозиции	$(-3)^1, (0)^4, (3)^1$
		все инволюции	$(-3)^1, (0)^4, (3)^1$
$S_4$	24	все транспозиции	$(-6)^1, (-2)^9, (0)^4, (2)^9, (6)^1$
		все инволюции	$(-3)^{10}, (1)^9, (3)^4, (9)^1$
$S_5$	120	все транспозиции	$(-10)^1, (-5)^{16}, (-2)^{25}, (0)^{36}, (2)^{25}, (5)^{16}, (10)^1$
		все инволюции	$(-5)^{52}, (1)^{25}, (5)^{42}, (25)^1$
$S_6$	720	все транспозиции	$(-15)^1, (-9)^{25}, (-5)^{81}, (-3)^{125}, (0)^{256}, (3)^{125}, (5)^{81}, (9)^{25}, (15)^1$
		все инволюции	$(-9)^{200}, (-5)^{81}, (0)^{256}, (3)^{50}, (15)^{132}, (75)^1$

Таблица 4.3 Спектры графов Кэли для групп малых порядков, порождённых множеством всех инволюций

группа	порядок	спектр
$D_{12}$	12	$(-5)^1, (-1)^6, (1)^4, (7)^1$
$D_{14}$	14	$(-7)^1, (0)^{12}, (7)^1$
$D_{16}$	16	$(-7)^1, (-1)^8, (1)^6, (9)^1$
$C_2 \times D_8$	16	$(-5)^1, (-1)^{12}, (3)^2, (11)^1$
$(C_4 \times C_2) : C_2$	16	$(-5)^1, (-1)^{11}, (3)^3, (7)^1$
$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	16	$(-1)^{15}, (15)^1$
$D_{18}$	18	$(-9)^1, (0)^{16}, (9)^1$
$(C_3 \times C_3) : C_2$	18	$(-9)^1, (0)^{16}, (9)^1$
$D_{20}$	20	$(-9)^1, (-1)^{10}, (1)^8, (11)^1$
$D_{22}$	22	$(-11)^1, (0)^{20}, (11)^1$
$D_{24}$	24	$(-11)^1, (-1)^{12}, (1)^{10}, (13)^1$
$(C_6 \times C_2) : C_2$	24	$(-7)^1, (-3)^1, (-1)^{16}, (3)^4, (5)^1, (9)^1$
$S_4$	24	$(-3)^{10}, (1)^9, (3)^4, (9)^1$
$C_2 \times C_2 \times S_3$	24	$(-9)^1, (-1)^{18}, (3)^4, (15)^1$

продолжение следует

Продолжение таблицы 4.3		
группа	порядок	спектр
$D_{26}$	26	$(-13)^1, (0)^{24}, (13)^1$
$D_{28}$	28	$(-13)^1, (-1)^{14}, (1)^{12}, (15)^1$
$D_{30}$	30	$(-15)^1, (0)^{28}, (15)^1$
$D_{32}$	32	$(-15)^1, (-1)^{16}, (1)^{14}, (17)^1$
$(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) : C_2$	32	$(-5)^3, (-1)^{24}, (3)^3, (11)^1, (19)^1$
$(C_4 \times C_2 \times C_2) : C_2$	32	$(-9)^1, (-1)^{27}, (7)^3, (15)^1$
$(C_4 \times C_4) : C_2$	32	$(-13)^1, (-1)^{24}, (3)^6, (19)^1$
$C_2 \times D_{16}$	32	$(-13)^1, (-1)^{24}, (3)^6, (19)^1$
$(C_8 \times C_2) : C_2$	32	$(-9)^1, (-5)^1, (-1)^{22}, (3)^6, (7)^1, (11)^1$
$(C_2 \times D_8) : C_2$	32	$(-9)^1, (-5)^2, (-1)^{21}, (3)^6, (7)^1, (15)^1$
$C_2 \times C_2 \times D_8$	32	$(-9)^1, (-1)^{28}, (7)^2, (23)^1$
$C_2 \times ((C_4 \times C_2) : C_2)$	32	$(-9)^1, (-1)^{27}, (7)^3, (15)^1$
$(C_2 \times D_8) : C_2$	32	$(-5)^6, (-1)^{16}, (3)^9, (19)^1$
$(C_2 \times Q_8) : C_2$	32	$(-5)^5, (-1)^{16}, (3)^{10}, (11)^1$
$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	32	$(-1)^{31}, (31)^1$
$D_{34}$	34	$(-17)^1, (0)^{32}, (17)^1$
$D_{36}$	36	$(-17)^1, (-1)^{18}, (1)^{16}, (19)^1$
$S_3 \times S_3$	36	$(-9)^2, (-3)^8, (0)^{16}, (3)^9, (15)^1$
$C_2 \times ((C_3 \times C_3) : C_2)$	36	$(-17)^1, (-1)^{18}, (1)^{16}, (19)^1$
$D_{38}$	38	$(-19)^1, (0)^{36}, (19)^1$
$D_{40}$	40	$(-19)^1, (-1)^{20}, (1)^{18}, (21)^1$
$(C_{10} \times C_2) : C_2$	40	$(-11)^1, (-7)^1, (-1)^{28}, (3)^8, (9)^1, (13)^1$
$C_2 \times C_2 \times D_{10}$	40	$(-17)^1, (-1)^{30}, (3)^8, (23)^1$
$D_{42}$	42	$(-21)^1, (0)^{40}, (21)^1$
$D_{44}$	44	$(-21)^1, (-1)^{22}, (1)^{20}, (23)^1$
$D_{46}$	46	$(-23)^1, (0)^{44}, (23)^1$
$D_{48}$	48	$(-23)^1, (-1)^{24}, (1)^{22}, (25)^1$
$(C_3 \times D_8) : C_2$	48	$(-15)^1, (-7)^1, (-3)^4, (-1)^{24}, (1)^{12}, (5)^4, (9)^1, (17)^1$
$L_2(3)$	48	$(-11)^1, (-3)^9, (-1)^{24}, (1)^4, (5)^9, (13)^1$

*продолжение следует*

Продолжение таблицы 4.3		
группа	порядок	спектр
$C_2 \times D_{24}$	48	$(-21)^1, (-1)^{36}, (3)^{10}, (27)^1$
$(C_{12} \times C_2) : C_2$	48	$(-13)^1, (-9)^1, (-1)^{34}, (3)^{10}, (11)^1, (15)^1$
$D_8 \times S_3$	48	$(-13)^1, (-9)^1, (-5)^2, (-3)^4, (-1)^{24}, (1)^8, (3)^1, (5)^4, (7)^2, (23)^1$
$(C_2 \times (C_3 : C_4)) : C_2$	48	$(-9)^1, (-5)^2, (-3)^4, (-1)^{25}, (1)^8, (3)^1, (5)^4, (7)^2, (11)^1$
$(C_4 \times S_3) : C_2$	48	$(-17)^1, (-5)^3, (-1)^{24}, (1)^{16}, (7)^3, (19)^1$
$C_2 \times ((C_6 \times C_2) : C_2)$	48	$(-13)^1, (-5)^1, (-1)^{40}, (7)^4, (11)^1, (19)^1$
$C_2 \times S_4$	48	$(-5)^{10}, (-1)^{24}, (3)^9, (7)^4, (19)^1$
$C_2 \times C_2 \times C_2 \times S_3$	48	$(-17)^1, (-1)^{42}, (7)^4, (31)^1$
$D_{50}$	50	$(-25)^1, (0)^{48}, (25)^1$
$(C_5 \times C_5) : C_2$	50	$(-25)^1, (0)^{48}, (25)^1$

Таблица 4.4 Спектры графов Кэли для групп  $L_2(n)$ , порождённых множеством всех инволюций, при  $n = 5, 7, 8, 9, 11, 13$

группа	порядок	спектр
$L_2(5)$	60	$(-5)^{18}, (0)^{16}, (3)^{25}, (15)^1$
$L_2(7)$	168	$(-7)^{18}, (-3)^{49}, (0)^{64}, (7)^{36}, (21)^1$
$L_2(8)$	504	$(-9)^{196}, (0)^{64}, (7)^{243}, (63)^1$
$L_2(9)$	360	$(-9)^{100}, (0)^{128}, (5)^{81}, (9)^{50}, (45)^1$
$L_2(11)$	660	$(-11)^{100}, (-5)^{121}, (0)^{288}, (11)^{150}, (55)^1$
$L_2(13)$	1092	$(-13)^{294}, (0)^{432}, (7)^{169}, (13)^{196}, (91)^1$

Таблица 4.5 Спектры графов Кэли для групп  $D_{2n}$ , порождённых множеством всех инволюций, при  $n = 26, 27, \dots, 132$

группа	порядок	спектр
$D_{2n}$ n - чётно	$2n$	$(1 - n)^1, (-1)^n, (1)^{n-2}, (n + 1)^1$
$D_{2n}$	$2n$	$(-n)^1, (0)^{2n-2}, (n)^1$
<i>продолжение следует</i>		

Продолжение таблицы 4.5		
группа	порядок	спектр
n - нечетно		

## 4.2 Диаметры и средние диаметры

При рассмотрении графа в качестве моделирования топологий многопроцессорных вычислительных систем берут во внимание следующие характеристики графа: количество вершин, степень (для регулярного графа), диаметр и средний диаметр.

Таблицы 4.6, 4.7, 4.8, 4.9 [111; 112] содержат указанные характеристики графов Кэли для:

- знакопеременных групп  $A_n$  при  $n = 4, 5, 6, 7$ ;
- симметрических групп  $S_n$  при  $n = 3, 4, 5, 6$ , порождённых набором всех транспозиций вида  $(ij)$  и набором всех инволюций;
- линейных групп  $L_2(n)$  при  $n = 5, 7, 8, 9, 11, 13$ , порождённых набором всех инволюций;
- диэдральных групп  $D_{2n}$  при  $n = 6, 7, \dots, 132$ , также порождённых множеством всех инволюций.

Порождающие множества являются симметричными, и в этом случае графы будут неориентированными. Именно неориентированные графы, как правило, используют при проектировании моделирования топологий многопроцессорных вычислительных систем.

Таблица 4.6 Диаметры графов Кэли для  $A_n$  при  $n = 4, 5, 6, 7$

$n$	Количество вершин	Степень вершины	Наборы порождающих	Диаметр	Средний диаметр
$n = 4$	12	4	(123), (124)	3	1.73
		4	(123), (234)	3	1.73
		4	(123), (134)	3	1.77
		3	(123), (12)(34)	3	2.09
<i>продолжение следует</i>					

<i>Продолжение таблицы 4.6</i>					
$n$	количество вершин	Степень вершины	Наборы порождающих	Диаметр	Средний диаметр
		6	(123), (124), (134)	2	1.45
$n = 5$	60	6	(123), (124), (125)	4	2.63
		6	(123), (234), (345)	5	2.64
		6	(123), (134), (145)	5	2.64
		4	(123), (12)(34), (12)(45)	6	3.78
		12	(123), (124), (125), (134), (135), (145)	3	1.85
$n = 6$	360	8	(123), (124), (125), (126)	6	3.63
		8	(123), (234), (345), (456)	7	3.86
		8	(123), (134), (145), (156)	5	3.45
		5	(123), (12)(34), (12)(45), (12)(56)	10	6.07
		20	(123), (124), (125), (126), (134), (135), (136), (145), (146), (156)	3	2.41
$n = 7$	2520	10	(123), (124), (125), (126), (127)	7	4.67
		10	(123), (234), (345), (456), (567)	10	5.34
		10	(123), (134), (145), (156), (167)	6	4.29
		6	(123), (12)(34), (12)(45), (12)(56), (12)(67)	15	8.91
<i>продолжение следует</i>					

Продолжение таблицы 4.6

$n$	количество вершин	Степень вершины	Наборы порождающих	Диаметр	Средний диаметр
		30	(123), (124), (125), (126), (127), (134), (135), (136), (137), (145), (146), (147), (156), (157), (167)	4	2.93

Таблица 4.7 Диаметры графов Кэли для групп  $S_n$  при  $n = 3,4,5,6$ 

$n$	Количество вершин	Степень вершины	Наборы порождающих	Диаметр	Средний диаметр
$n = 3$	6	3	все транспозиции	2	1.4
		3	все инволюции	2	1.4
$n = 4$	24	6	все транспозиции	2	1.61
		9	все инволюции	3	2.0
$n = 5$	120	10	все транспозиции	2	1.79
		25	все инволюции	4	2.74
$n = 6$	720	15	все транспозиции	2	1.89
		75	все инволюции	5	3.55

Таблица 4.8 Диаметры графов Кэли для групп  $L_2(n)$ , порождённых множеством всех инволюций, при  $n = 5,7,8,9,11,13$ 

$n$	Количество вершин	Степень вершины	Диаметр	Средний диаметр
$n = 5$	60	15	2	1.75
$n = 7$	168	21	3	2.16
$n = 8$	504	63	2	1.87
$n = 9$	360	45	2	1.87
$n = 11$	660	55	3	2.98
$n = 13$	1092	91	2	1.92

Таблица 4.9 Диаметры графов Кэли для групп  $D_{2n}$ , порождённых множеством всех инволюций, при  $n = 6, 7, \dots, 132$

$n$	Количество вершин	Степень вершины	Диаметр	Средний диаметр
$D_{2n}$	12 – 264	7 – 133	2	1.36 – 1.5

Из таблицы 4.9 видим, что диаметр во всех случаях получается равным двум, а средний диаметр варьируется от 1.47 до 1.5.

Сравним полученные характеристики графов Кэли знакопеременных, симметрических, линейных групп и групп диэдра с соответствующими характеристиками гиперкубов и торов. Граф  $k$ -мерного гиперкуба имеет  $2^k$  вершин, его степень и диаметр равны  $k$ , средний диаметр равен  $\frac{k}{2}$ .

Легко увидеть, что графы знакопеременных, симметрических, линейных групп и групп диэдра (в особенности, групп диэдра) обладают более предпочтительными характеристиками, чем гиперкубы. Напомним, что топология  $\Gamma_1$  считается предпочтительнее  $\Gamma_2$ , если  $|V_1| \simeq |V_2|$ , но  $s_1 < s_2$  и  $D_1 < D_2$ , где  $V$  — количество вершин,  $s$  — степень вершины,  $D$  — диаметр. Отсюда можно сделать вывод, что данные графы заслуживают внимания при проектировании перспективных топологий многопроцессорных вычислительных систем.

## Заключение

Итогом диссертационного исследования является объёмный экспериментальный материал, который позволяет надеяться на новые результаты, касающиеся целочисленных графов Кэли.

Изучены графы Кэли на следующих группах:

- симметрических  $S_n$ , порожденных набором всех транспозиций вида  $(ij)$  и набором всех инволюций для  $n = 3, 4, 5, 6$ .
- знакопеременных  $A_n$  для  $n = 4, 5, 6, 7, 8$ , с различными наборами порождающих.
- линейных  $L_2(n)$  для  $n = 5, 7, 8, 9, 11, 13$ , порожденных набором всех инволюций.
- диэдра  $D_{2n}$  для  $n = 6, 7, \dots, 132$ , порожденных набором всех инволюций.

Построены различные варианты задания симметрической и знакопеременной групп в терминах порождающих и определяющих соотношений для произвольного  $n$ . Для каждого набора порождающих для конкретных  $n$  построены графы Кэли и их матрицы смежности. Найдены диаметры и средние диаметры указанных графов. Для каждого графа проведен анализ на предмет его целочисленности. Получен программный продукт, позволяющий решать указанные выше задачи в общем виде.

Полученные экспериментальные данные позволили выдвинуть следующие гипотезы.

*Гипотеза 1.* Пусть  $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ , где  $G = A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R = \{(12i) \mid i = 3, \dots, n\}$ ,  $S = R \cup R^{-1}$ . Тогда граф  $\Gamma$  целочисленный.

*Гипотеза 2.* Пусть  $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ , где  $G = A_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R = \{(1ij) \mid 1 < i < j \leq n\}$ ,  $S = R \cup R^{-1}$ . Тогда граф  $\Gamma$  целочисленный.

*Гипотеза 3.* Пусть  $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ , где  $G = S_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S = \{(ij) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ . Тогда граф  $\Gamma$  целочисленный.

*Гипотеза 4.* Пусть  $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$ , где  $G$  — группа, порождённая инволюциями,  $S$  — инвариантное множество инволюций группы  $G$ . Тогда граф  $\Gamma$  целочисленный.

## Список литературы

1. *Harary F, Schwenk A. J.*, Which graphs have integral spectra? *Graphs and Combinatorics* (R. Bari and F. Harary, eds.), Springer-Verlag, Berlin (1974), C. 45–51.
2. *K. Balińska, D. Cvetkovič, Z. Radosavljevič, S. Simič, and D. Stevanovič*, A survey on integral graphs, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.*, **13** (2002), 42–65.
3. *O. Ahmadi, N. Alon, I. F. Blake, I. E. Shparlinski*, Graphs with integral spectrum, *Linear Algebra and its Applications*, **430** (2009) 547–552.
4. *W. Klotz, T. Sander*, Integral Cayley graphs over abelian groups, *Electr. J. Combin.*, **7** (2010) 13 pp.
5. *R. Krakovski, B. Mohar*, Spectrum of Cayley graphs on the symmetric group generated by transpositions, *Linear Algebra and its Applications*, **437** (2012) 1033–1039.
6. *L. Lu, Q. Huang, X. Huang*, Integral Cayley graphs over dihedral groups, *J. Algebr. Comb.*, **47**(4) (2018) 585–601.
7. *S. M. Mirafzal, A. Zafari*, An interesting property of a class of circulant graphs, *Journal of Mathematics*, **2017** Article ID 6454736, 4 pp.
8. *P. Renteln*, The distance spectra of Cayley graphs of Coxeter groups, *Discrete mathematics*, **311** (2011) 738–755.
9. *W. So*, Integral circulant graphs, *Discrete mathematics*, **306** (2005) 153–158.
10. *G. Chapuy, V. Feray*, A note on a Cayley graph of  $Sym_n$ , *arXiv:1202.4976v2* (2012) 1–3.
11. *J. Friedman*, On Cayley graphs on the symmetric group generated by transpositions, *Combinatorica* **20**(4) (2000) 505–519.
12. GAP: Groups, algorithms, and programming, <http://www/gap-system.org>.

13. *S. Akers, B. Krishnamurthy*, A group theoretic model for symmetric interconnection networks, Proceedings of the International Conference on Parallel Processing, (1986), 216–223.
14. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.*, Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1974. 456 с.
15. *Васильев А. В., Мазуров В. Д.*, Высшая алгебра: В 2 ч.: Конспект лекций / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2010, ч. 1. С. 28–33.
16. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.*, Основы теории групп, Наука, М., 1982. С. 117–126.
17. *Константинова Е.В.*, Комбинаторные задачи на графах Кэли. Новосибирск: НГУ, 2010. — С. 10–17. Курс лекций по теории графов, читаемых для студентов Новосибирского государственного университета на кафедре теоретической кибернетики.
18. *Д.В.Карпов*. Сайт книги «Теория графов» [Электронный ресурс] – Режим доступа: [https://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs\\_dk.pdf](https://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs_dk.pdf), С. 15–22, свободный.
19. *L. Wang*, A survey of results on integral trees and integral graphs, Department of Applied Mathematics, Faculty of EEMCS, University of Twente The Netherlands, Memorandum No. 1763 (2005), P. 1–22.
20. *Cvetkovic D.*, Cubic integral graphs. Univ. Beograd, Publ Elektrotehn. Fak. Ser.Mat. Fiz., Nos. 498–541 (1975), С. 107–113.
21. *Cvetkovic D.*, Spectra of graphs formed by some unary operations. Publ. Inst. Math. (Beograd), 19 (33) (1975), P. 37–41.
22. *Roitman M.*, An infinite family of integral graphs. Discrete Math., 52 (1984), P. 313–315.
23. *Cvetkovic D., Doob M., Sachs H.*, Spectra of graphs – Theory and application. Deutscher Verlag der Wissenschaften – Academic Press, Berlin–New York,

- 1980; second edition 1982; third edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg–Leipzig, 1995.
24. *Cvetkovic D., Gutman I., Trinajstić N.*, Conjugated molecules having integral graph spectra. *Chem Phys. Letters*, 29 (1974), P. 65–68.
  25. *M. Watanabe*, Note on integral trees, *Math. Rep. Toyama Univ.* 2 (1979), 95–100.
  26. *M. Watanabe, A.J. Schwenk*, Integral starlike trees, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 28 (1979), no.1, P. 120–128.
  27. *M. Roitman*, An infinite family of integral graphs, *Discrete Math.* 52 (1984), no.2-3, P. 313–315.
  28. *X.L. Li and G.N. Lin*, On trees with integer eigenvalues, *Kexue Tongbao (Chinese)* 32 (1987), no.11, 813-816 (in Chinese), or On integral trees problems, *Kexue Tongbao (English Ed.)* 33 (1988), no,10, 802-806 (in English).
  29. *M. Capobianco, S. Maurer, D. McCarthy and J. Molluzzo, (eds.)*, A collection of open problems, Second International Conference on Combinatorial Mathematics (New York, 1978), 565-590, *Ann. New York Acad. Sci.*, 319, New York Acad. Sci., New York, (1979), see pp.582–583.
  30. *R.Y. Liu*, Integral trees of diameter 5 (in Chinese), *J. Systems Sci. Math. Sci.* 8 (1988), no.4, 357–360.
  31. *P. Hrc, R. Nedela*, Balanced integral trees, *Math. Slovaca* 48 (1998), no.5, 429–445.
  32. *L.G. Wang, X.L. Li and R.Y. Liu*, Integral trees with diameter 6 or 8, 6th Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (Enschede, 1999), 6 pp. (electronic), *Electron. Notes Discrete Math.* 3, Elsevier, Amsterdam (1999).
  33. *P.Z. Yuan*, Integral trees of diameter 4 (in Chinese), *J. Systems Sci. Math. Sci.* 18 (1998), no.2, 177–181.
  34. *D.L. Zhang, S.W. Tan*, Integral trees of diameter 4 (in Chinese), *J. Systems Sci. Math. Sci.* 20 (2000), no.3, 330–337.

35. *M.S. Li, W.S. Yang, J.B. Wang*, Notes on the spectra of trees with small diameters (in Chinese), *J. Changsha Railway University* 18 (2000), no.2, 84–87.
36. *H.Z. Ren*, On integral trees with diameter four (in Chinese), *J. Qinghai Normal University* (2000), no.1, 8–11.
37. *D.S. Xu*, A note on the integral trees with diameter 4 (in Chinese), *J. Qinghai University* 14 (1996), no.2, 16–18.
38. *D.S. Xu*, Some new classes of the integral trees with diameter 4 (in Chinese), *J. Hebei University* 17 (1997), no.1, 12–16.
39. *D.L. Zhang, L.Y. Wei*, On the existence of integral trees of diameter 4 (in Chinese), *J. Guangxi Institute of Technology* 9 (1998), no.4, 1–5.
40. *L.G. Wang, H.J. Broersma, C. Hoede and X.L. Li*, Integral trees of diameter 6, (2004) preprint.
41. *L.G. Wang, H.J. Broersma, C. Hoede, X.L. Li, G. Still*, Families of integral graphs, (2004), preprint.
42. *L.G. Wang and X.L. Li*, Some new classes of integral trees with diameters 4 and 6, *Australas. J. Combin.* 21 (2000), 237–243.
43. *L.G. Wang, X.L. Li*, Integral trees with diameters 5 and 6, (2003), preprint, accepted for publication in *Discrete Math.*(2004).
44. *L.G. Wang, X.L. Li, X.J. Yao*, Integral trees with diameters 4, 6 and 8, *Australas. J. Combin.* 25 (2002), 29–44.
45. *L.G. Wang, X.L. Li, S.G. Zhang*, Families of integral trees with diameters 4, 6 and 8, *Discrete Appl. Math.* 136 (2004), no.2-3, 349–362. (or *L.G. Wang, X.L. Li and S.G. Zhang*, Some new families of integral trees with diameters 4 and 6, *Electronic Notes in Discrete Math.* vol. 8 (2001)).
46. *P. Hrc, and M. Pokorný*, On integral balanced rooted trees of diameter 10, *Acta Univ. M. Belii Math* (2003), no.10, 9–15.

47. *Bussemaker F. C., Cvetkovic D.*, There are exactly 13 connected, cubic, integral graphs. Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., Nos. 544–576 (1976), 43–48.
48. *Schwenk A. J.*, Exactly thirteen connected cubic graphs have integral spectra. Proceedings of the International Graph Theory Conference at Kalamazoo, May 1976, (Y. Alavi and D. Lick, eds.) Springer-Verlag.
49. *D. Cvetkovic*, Cubic integral graphs, Univ. Beograd, Publ. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 498-541 (1975), 107–113.
50. *Abdollahi A., Vatandoost E.*, Which Cayley graphs are integral? Electronic J. Combinatorics 16 (2009) #R122
51. *L.G. Wang, X.L. Li, C. Hoede*, Integral complete r-partite Graphs, Discrete Math. 283 (2004), no. 1-3, 231–241.
52. *Z. Radosavljevic, S. Simic*, There are just thirteen connected nonregular nonbipartite integral graphs having maximum vertex degree four (a shortened report), Proc. Sixth Yugoslav Seminar on Graph Theory (Dubrovnik 1985), Univ. Novi Sad, Novi Sad, (1986), 183–187.
53. *S. Simic, Z. Radosavljevic*, The nonregular, nonbipartite, integral graphs with maximum degree four, J. Combin. Inform. System Sci. 20 (1995), no.1-4, 9–26.
54. *D. Cvetkovic, S.K. Simic, D. Stevanovic*, 4 - regular integral graphs, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 9 (1998), 89–102.
55. *D. Stevanovic*, 4 - Regular integral graphs avoiding  $\pm 3$  in the spectrum, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 14 (2003), 99–110.
56. *D. Stevanovic*, Nonexistence of some 4 - regular integral graphs, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 10 (1999), 81–86.
57. *W. G. Bridges, R. A. Mena*, Multiplicative design. II. Uniform normal and related structures, J. Combin. Theory Ser.A 27(1979), no.3, 269–281.
58. *W. G. Bridges, R. A. Mena*, Multiplicative cones - a family of three eigen-value graphs, Aequationes Math. 22 (1981), no.2-3, 208–214.

59. *E. R. van Dam*, Regular graphs with four eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* 226/228 (1995), 139–162.
60. *E.R. van Dam*, Nonregular graphs with three eigenvalues, *J. Combin. Theory Ser.B* 73 (1998), no.2, 101–118.
61. *E.R. van Dam, W.H. Haemers*, Which graphs are determined by their spectrum? Special issue on the Combinatorial Matrix Theory Conference (Pohang, 2002), *Linear Algebra Appl.* 373 (2003), 241–272.
62. *E.R. van Dam, E. Spence*, Small regular graphs with four eigenvalues, *Discrete Math.* 189 (1998), no.1–3, 233–257.
63. *M. Muzychuk, M. Klin*, On graphs with three eigenvalues, *Discrete Math.* 189 (1998), no.1-3, 191–207.
64. *L.G. Wang, X.L. Li, S.G. Zhang*, Construction of integral graphs, *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B* 15 (2000), no.3, 239–246.
65. *K. T. Balinska, D. Cvetkovic, M. Lepovic, S. K. Simic*, There are exactly 150 connected integral graphs up to 10 vertices. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.* 10 (1999), 95–105.
66. *Cvetkovic D., Petric M.*, A table of connected graphs on six vertices. *Discrete Math.*, 50, No. 1 (1984), 37–49.
67. *Cvetkovic D., Doob M., Gutman I., Torgasev A.*, Recent results in the theory of graph spectra. (*Annals of discrete math.* 36), North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford–Tokyo, 1988.
68. *Balinska K., Kupczyk M., Zwierzynski K.*, Methods of generating integral graphs. *Computer Science Center Report No. 457*, Technical University of Poznan, (1997), 1–68.
69. *Balinska K. T., Kupczyk M., Simic S. K., Zwierzynski K. T.*, On generating all integral graphs on 11 vertices. *Computer Science Center Report No. 469*, Technical University of Poznan, (1999/2000), 1–53.

70. *Balinska K. T., Kupczyk M., Simic S. K., Zwierzynski K. T.*, On generating all integral graphs on 12 vertices. Computer Science Center Report No. 482, Technical University of Poznan, (2001), 1–36.
71. *K. T. Balinska, S. K. Simic*, The nonregular, bipartite, integral graphs with maximum degree 4. Part I: Basic properties, Graph theory (Kazimierz Dolny, 1997), Discrete Math. 236 (2001), no.1-3, 13–24.
72. *K. T. Balinska, S. K. Simic*, Some remarks on integral graphs with maximum degree four. XIV Conference on Applied Mathematics (Palic, 2000). Novi Sad J. Math. 31 (2001), no.1, 19–25.
73. *K. T. Balinska, S. K. Simic, K. T. Zwierzynski*, Which non-regular bipartite integral graphs with maximum degree four do not have  $\pm 1$  as eigenvalues? Discrete Math. 286 (2004), no.1-2, 15–24.
74. *L.G. Wang, X.L. Li, C. Hoede*, Nonregular bipartite integral graphs, (2003), preprint.
75. *D.L. Zhang, H.W. Zhou*, On some classes of integral graphs (in Chinese), Guangxi Sciences 10 (2003), no.3, 165–168.
76. *M. Lepovic*, On integral graphs which belong to the class, Graphs Combin. 19 (2003), no.4, 527–532.
77. *M. Lepovic*, Some classes of integral graphs which belong to the class, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 74 (88) (2003), 25–36.
78. *M. Lepovic*, On integral graphs which belong to the class, J. Appl. Math. Comput. 14 (2004), no.1-2, 39–49.
79. *M. Lepovic*, On integral graphs which belong to the class, Discrete Math. 285 (2004), no.1-3, 183–190.
80. *L.G. Wang, X.L. Li, C. Hoede*, Two classes of integral regular graphs, accepted for publication in Ars Combinatoria.
81. *L.G. Wang, X.L. Li, C. Hoede*, Eigenvalues of a special kind of symmetric block circulant matrices, Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B 19 (2004), no. 1, 17–26.

82. *Akers S., Krishnamurthy B.*, A group theoretic model for symmetric interconnection networks // Proceedings of the International Conference on Parallel Processing, 1986. P. 216—223.
83. *Even S., Goldreich O.*, The Minimum Length Generator Sequence is NP-Hard // Journal of Algorithms, № 2, 1981. P. 311—313.
84. *Кузнецов А. А., Кузнецова А. С.*, Параллельный алгоритм для исследования графов Кэли групп подстановок // Вестник СибГАУ. 2014. № 1. С. 34—39.
85. *Кузнецов А.А.*, Графы Кэли бернсайдовых групп периода 3 // Сибирские электронные математические известия, Т. 12, 2015. С. 248—254.
86. *А. А. Кузнецов*, Исследование графов Кэли групп Джевонса в качестве топологий многопроцессорных вычислительных систем // Решетневские чтения. 2015. №19.
87. *А. А. Кузнецов, А. С. Кузнецова*, О графе Кэли одной подгруппы бернсайдовой группы  $B_0(2,5)$ , ПДМ. Приложение, 2017, № 10, 19—21
88. *Huppert B.*, Endliche Gruppen. I. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1967.
89. *N. Biggs*, Algebraic graph theory, Cambridge University Press, 1974.
90. *Skala, V.*, Modified Gaussian Elimination without Division Operations. Dec 09, 2014 [Электронный ресурс] – Режим доступа: [https://www.researchgate.net/publication/260829250\\_Modified\\_Gaussian\\_Elimination\\_without\\_Division\\_Operations](https://www.researchgate.net/publication/260829250_Modified_Gaussian_Elimination_without_Division_Operations), свободный.
91. *Atkinson, K.A.*, An Introduction to Numerical Analysis, New York: John Wiley & Sons, ISBN 978-0-471-50023-0, 1989
92. *Grcar, J.*, Mathematicians of Gaussian elimination, Notices of the American Mathematical Society 58 (6): 782—792, 2011
93. *Skala. V.*, Barycentric Coordinates Computation in Homogeneous Coordinates, Computers & Graphics, Elsevier, ISSN 0097-8493, Vol. 32, No.1, P.120—127, 2008

94. *Skala.V.*, Projective Geometry and Duality for Graphics, Games and Visualization - Course SIGGRAPH Asia 2012, Singapore, ISBN 978-1-4503-1757-3, 2012
95. *Rump. S.M.*, Reliability in Computing, The role of Interval Methods in Scientific Computing, Academic Press, 1988
96. *Bronson,R., Costa,G.B.*, Matrix Methods: Applied Linear Algebra, Academic Press, ISBN 978-0-12-374427-2, 2009
97. *Fang.X.G., Havas,G.*, On the worst-case complexity of integer Gaussian elimination, Proceedings of the Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. ISSAC '97, ACM. P. 28—31, 1997
98. *Press.W.H, Teukolsky,S.A., Vetterling,W.T., Flannery, B.P.*, Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed.), New York, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-88068-8, 2007
99. Huppert B. Endliche Gruppen. I. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1967.
100. *Мазуров В. Д.* Характеризация знакопеременных групп.// II, Алгебра и логика.— 2006.—Т. 45, № 2.—С. 203–214.
101. *Yamaguchi,F.*, Computer-Aided Geometric Design: A Totally Four-Dimensional Approach, Springer, 2002
102. *Skala.V., Kaiser.J., Ondracka,V.*, Library for Computation in the Projective Space, 6th Int.Conf. Aplimat, Bratislava, ISBN 978-80-969562-00-8, P. 125—130, 2007
103. Нерешённые вопросы теории групп. Коуровская тетрадь / Сост. В. Д. Мазуров, Е. И. Хухро. — 19 изд. доп. — Новосибирск: Институт математики Сибирского отделения РАН, 2018. — 248 с.
104. *Лыткина Д. В., Овчаренко А. Ю.*, О различных представлениях симметрической группы  $S_n$  // Обработка информации и математическое моделирование: Рос. науч.-техн. конф. : материалы конф. / Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. Новосибирск, 2016. С. 241—245.

105. *Овчаренко А. Ю.*, Копредставления знакопеременной группы // Международная конференция "Мальцевские чтения 21-25 ноября 2016 г.: тезисы докладов. Новосибирск, 2016. С. 100.
106. *Овчаренко А. Ю.*, Об одном способе поиска больших подгрупп в группах симметрий графов // Вестник СибГУТИ. 2017. №1. С. 58—64.
107. *Лыткина Д. В., Овчаренко А. Ю.*, Графы Кэли для знакопеременной группы  $A_n$  // Обработка информации и математическое моделирование: Рос. науч.-техн. конф. : материалы конф. / Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. Новосибирск, 2017. С. 243—247.
108. *Овчаренко А. Ю.*, О целочисленных графах Кэли для  $A_n$  // Международная научная конференция "Актуальные проблемы прикладной математики и физики", 17-21 мая 2017 г.: тезисы докладов. Нальчик – Терскол, 2017. С. 160.
109. *Ovcharenko A.*, On integral Cayley graphs for  $A_n$  // Abstracts of the International Conference and PhD-Master Summer School on Groups and Graphs, Metrics and Manifolds "GROUPS AND GRAPHS, METRICS AND MANIFOLDS", July 22 -30 2017.: Yekaterinburg: Ural Federal University, 2017. P. 82.
110. *Овчаренко А. Ю.*, О целочисленных графах Кэли для знакопеременной группы  $A_n$  // Вестник СибГУТИ. 2017. №4. С. 15—23.
111. *Овчаренко А. Ю.*, Графы Кэли для некоторых конечных групп // Обработка информации и математическое моделирование: Рос. науч.-техн. конф.: материалы конф./Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. Новосибирск, 2018. С. 218—233.
112. *Овчаренко А. Ю.*, Спектры и диаметры графов Кэли некоторых конечных групп // Вестник СибГУТИ. 2018. №3. С. 45—61.
113. Свидетельство 2018661431 РФ. Определение целочисленной части спектра графа Кэли конечной группы на заданном наборе порождающих: свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ / Д.В. Лыт-

кина, А.Ю. Овчаренко; заявитель и патентообладатель СибГУТИ; заявл. 22.06.2018, опубл. 07.09.2018.

## Список таблиц

1.1	Простые примеры целочисленных графов . . . . .	19
1.2	Число связных целочисленных графов с $n$ вершинами . . . . .	25
3.1	Этап 1 . . . . .	45
3.2	Этап 2 . . . . .	45
3.3	Этап 3 . . . . .	45
3.4	Этап 4 . . . . .	46
3.5	Этап 5 . . . . .	46
4.1	Спектры графов Кэли для $A_n$ при $n = 4,5,6,7,8$ . . . . .	54
4.2	Спектры графов Кэли для групп $S_n$ при $n = 3,4,5,6$ . . . . .	56
4.3	Спектры графов Кэли для групп малых порядков, порождённых множеством всех инволюций . . . . .	56
4.4	Спектры графов Кэли для групп $L_2(n)$ , порождённых множеством всех инволюций, при $n = 5,7,8,9,11,13$ . . . . .	58
4.5	Спектры графов Кэли для групп $D_{2n}$ , порождённых множеством всех инволюций, при $n = 26,27, \dots, 132$ . . . . .	58
4.6	Диаметры графов Кэли для $A_n$ при $n = 4,5,6,7$ . . . . .	59
4.7	Диаметры графов Кэли для групп $S_n$ при $n = 3,4,5,6$ . . . . .	61
4.8	Диаметры графов Кэли для групп $L_2(n)$ , порождённых множеством всех инволюций, при $n = 5,7,8,9,11,13$ . . . . .	61
4.9	Диаметры графов Кэли для групп $D_{2n}$ , порождённых множеством всех инволюций, при $n = 6,7, \dots, 132$ . . . . .	62

## Приложение А

Исходный код программной реализации алгоритма нахождения  
целого спектра графа Кэли

## Листинг А.1 MAIN.PY

```
import ast
from optparse import OptionParser
5
from integral_spectrum_calculation import *

def get_file_content(filepath):
10     with open(filepath, "r") as file_obj:
        return file_obj.read()

def parse_sets_file(filepath):
15     all_list_generator = get_file_content(filepath)
    return ast.literal_eval(all_list_generator)

def parse_all_list_generator_path(filepath):
20     all_list_generator = get_file_content(filepath)

    for replace_symbol in ["\n", "]", "[":
        all_list_generator = all_list_generator.replace(replace_
            symbol, "")

25     spllited_res = all_list_generator.split(", ")

    return [res.strip() for res in spllited_res]

30 if __name__ == "__main__":
    parser = OptionParser()
```

```

parser.add_option("--all-list-generator-path", dest="all_
    list_generator_path")
parser.add_option("--sets-path", dest="sets_path")
35 parser.add_option("--gap-path", dest="gap_exec_path",
    default="/usr/bin/gap")
(options, args) = parser.parse_args()

all_list_generator = parse_all_list_generator_path(options.
    all_list_generator_path)
sets = parse_sets_file(options.sets_path)
40 multiply_result = get_gap_multiply_res(all_list_generator,
    sets)
graph_nodes = get_nodes_for_graph(sets, multiply_result, all
    _list_generator)

incidence_matrix = get_incidence_matrix(graph_nodes)
45 ranks = calculate_matrix_rank(incidence_matrix, len(sets))

matrix_spectrum_res = get_spectrum(ranks, len(all_list_
    generator))

50 print (matrix_spectrum_res)
print is_integral_graph(matrix_spectrum_res, all_list_
    generator)

```

## ЛИСТИНГ А.2 INTEGRAL\_SPECTRUM\_CALCULATION.PY

```

from collections import defaultdict
import copy
5 import re

from gap_management import process_gap_command

10 def is_integral_graph(matrix_spectrum, list_alternating_group):
    sum_res = sum(matrix_spectrum.values())

    if sum_res == len(list_alternating_group):
        return True

```

```

15     else:
        return False

def create_gap_functions_by_template(template, n):
20     prepared_functions = []

    for current_n_value in range(3, n + 1):
        func_with_specified_n = template.replace("n", str(
            current_n_value))
        prepared_functions.append(func_with_specified_n)
25

    return prepared_functions

def create_gap_functions_by_template_for_4_method(template, n):
30     prepared_functions = []

    for current_n_value in range(3, n):
        func_with_specified_n = template.replace("n", str(
            current_n_value + 1))
        prepared_functions.append(func_with_specified_n)
35

    return prepared_functions

def get_generator(prepared_functions_in_gap_format):
40     step_results = copy.copy(prepared_functions_in_gap_format)

    for prepared_gap_function in prepared_functions_in_gap_
        format:
        gap_command = "(%s)^-1;" % prepared_gap_function
        step_results.append(process_gap_command(gap_command))
45

    return step_results

def get_gap_list_alternating_group(n):
50     gap_command = "List(AlternatingGroup(%d));" % n
    list_alternative_group_res = process_gap_command(gap_command
    )

```

```

print (list_alternative_group_res)

for replace_symbol in ["\n", "]", "[":
55     list_alternative_group_res = list_alternative_group_res.
        replace(replace_symbol, "")

splitted_res = list_alternative_group_res.split(", ")

60     return [res.strip() for res in splitted_res]

def get_gap_multiply_res(list_group_res, generator):
    def insert_multiply(part_of_multiply_result):
65         index = part_of_multiply_result.find(")(")

        if index != -1:
            return part_of_multiply_result[:index + 1] + '*' +
                part_of_multiply_result[index + 1:]

        return part_of_multiply_result

70     gap_multiply_commands = []

    for res in list_group_res:
        for one_item in generator:
75             gap_multiply_commands.append("%s*%s;" % (insert_
                    multiply(res.strip()), insert_multiply(one_item))
                )

    splitted_gap_multiply_commands_list = [gap_multiply_commands
        [x:x + 2000]

80             for x in range(0, len
                (gap_multiply_
                    commands), 2000)]

    multiply_results = []
    gap_call_numb = 1

    print "Multiplying: GAP will be called %d times!" % len(
        splitted_gap_multiply_commands_list)

```

```

85 for gap_multiply_command in splitted_gap_multiply_commands_
    list:
        print "GAP multiply call #%d of #%d for %d elements" % (
            gap_call_numb, len(splitted_gap_multiply_commands_
                list), len(gap_multiply_command))

        multiply_res = process_gap_command("".join(gap_multiply_
            command))
90 multiply_res = multiply_res.replace('>', '').replace(' '
    , '')

    parsed_multiply_res = []

    for item in multiply_res.split('\n'):
95         if item != '':
            parsed_multiply_res.append(item.replace('\n', ' '
                ) + ')')

        multiply_results.extend(parsed_multiply_res)
        gap_call_numb += 1

100 return multiply_results

def get_nodes_for_graph(generator, multiply_result, list_
    alternating_group_res):
105     graph_dict = defaultdict(list)

        nodes_count = len(generator)
        current_mult_res_numb = 0

110     for node in list_alternating_group_res:
        for _ in range(nodes_count):
            graph_dict[node].append(multiply_result[current_mult
                _res_numb])
            current_mult_res_numb += 1

115     print "Graph nodes count: %d" % len(graph_dict)

    return graph_dict

```

```

120 def get_incidence_matrix(graph_nodes):
    matrix_size = len(graph_nodes)
    incidence_matrix = [[0 for x in range(matrix_size)] for y in
        range(matrix_size)]
    matrix_titles = graph_nodes.keys()

125     for main_graph_node in graph_nodes:
        main_graph_node_pos = matrix_titles.index(main_graph_
            node)

        for related_graph_node in graph_nodes[main_graph_node]:
            related_graph_node_pos = matrix_titles.index(related
                _graph_node)
130             incidence_matrix[main_graph_node_pos][related_graph_
                node_pos] = 1

    return incidence_matrix

135 def calculate_matrix_rank(original_incidence_matrix, x):
    ranks = {}
    min_x_value = -1 * x

    for current_x_value in range(min_x_value, x + 1, 1):
140         incidence_matrix = copy.deepcopy(original_incidence_
            matrix)

        for node_number in range(len(incidence_matrix)):
            incidence_matrix[node_number][node_number] = current
                _x_value

145         gap_command = "A:=%s; Rank(A);" % str(incidence_matrix)
        gap_out = process_gap_command(gap_command)

        rank_res_pattern = re.compile(".*> (\d+).*", re.DOTALL)
        ranks[current_x_value] = int(rank_res_pattern.search(gap
            _out).group(1))

150     return ranks

```

```

def get_spectrum(ranks, elem_count):
155     res = {}

        for x in ranks:
            rank = ranks[x]

160         if rank < elem_count:
            res[-1 * x] = elem_count - rank

        return res

```

### Листинг А.3 GAP\_MANAGEMENT.PY

```

import re
import subprocess
5

def process_gap_command(gap_command):
    gap_process = subprocess.Popen("/usr/local/bin/gap", stdout=
        subprocess.PIPE, stdin=subprocess.PIPE)
    gap_out, gap_err = gap_process.communicate(input=gap_command
10        )

    if gap_err is not None:
        raise Exception("Gap fails with error", gap_err)

    gap_output_pattern = re.compile(".*gap> > (.*)\\n", re.
        DOTALL)
15

    try:
        gap_result = gap_output_pattern.search(gap_out).group(1)
    except AttributeError:
        gap_output_pattern = re.compile(".*gap> (.*)", re.DOTALL
        )
20        return gap_output_pattern.search(gap_out).group(1)

    return gap_result

```

## Приложение Б

## Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018661431

«Определение целочисленной части спектра графа Кэли  
конечной группы на заданном наборе порождающих»

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования «Сибирский  
государственный университет телекоммуникаций и  
информатики» (RU)*

Авторы: *Лыткина Дарья Викторовна (RU),  
Овчаренко Алёна Юрьевна (RU)*



Заявка № 2018616455

Дата поступления 22 июня 2018 г.

Дата государственной регистрации

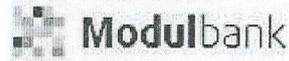
в Реестре программ для ЭВМ 07 сентября 2018 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

 Г.П. Ивлиев

## Приложение В

### Акты о внедрении результатов диссертационной работы



ИНН 2204000595  
ОГРН 1022200525841

УТВЕРЖДАЮ  
Руководитель отдела разработки

Ю.В. Васильев

2018 г.



#### АКТ

о внедрении результатов диссертационного исследования

Настоящим подтверждаю, что теоретические результаты, содержащиеся в диссертационном исследовании Овчаренко Алёны Юрьевны «О свойствах графов Кэли некоторых конечных групп» использовались в архитектурных решениях банка, а именно в ускорении процесса обработки пользовательской информации.

Акционерное общество Коммерческий Банк «Модульбанк» | 156005, Костромская область, г. Кострома, пл. Октябрьская, д.1.

АО КБ «Модульбанк» | Лицензия Банка России №1927 от 16.03.2016 г. | modulbank.ru | 8 (800) 333 79 96 | info@modulbank.ru

УТВЕРЖДАЮ



Ректор СибГУТИ

В.Г. Беленький

2018 г.

## А К Т

**об использовании результатов диссертационной работы  
Овчаренко Алёны Юрьевны «О свойствах графов Кэли некоторых конечных  
групп», представленной на соискание ученой степени кандидата технических  
наук по специальности 05.13.17 «Теоретические основы информатики», в  
учебный процесс федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования «Сибирский  
государственный университет телекоммуникаций и информатики»  
(СибГУТИ)**

Мы, нижеподписавшиеся, декан Факультета информатики и вычислительной техники д.ф.–м.н. профессор В.К. Трофимов, заместитель заведующего Кафедрой высшей математики к.ф.–м.н. доцент О. Е. Дмитриева, составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы А.Ю. Овчаренко «О свойствах графов Кэли некоторых конечных групп» используются в учебном процессе СибГУТИ, а именно: результаты о графах Кэли симметрических и знакопеременных групп используются в курсе лекций по дисциплине «Дискретная математика», раздел «теория графов» (уровень бакалавриата).

Декан Факультета информатики  
и вычислительной техники  
д.ф.–м.н. профессор

В.К. Трофимов

Заместитель заведующего  
Кафедрой высшей математики  
к.ф.–м.н. доцент

О. Е. Дмитриева

**СПРАВКА**

**об использовании результатов диссертационной работы  
Овчаренко Алёны Юрьевны «О свойствах графов Кэли некоторых конечных  
групп», представленной на соискание ученой степени кандидата технических  
наук по специальности 05.13.17 «Теоретические основы информатики»**

Справка дана Овчаренко А.Ю. в том, что результаты ее диссертационной работы «О свойствах графов Кэли некоторых конечных групп», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.13.17 «Теоретические основы информатики», использованы при выполнении научно-исследовательских работ на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики» (СибГУТИ):

- проект НИОКТР АААА-А17-117041910201-1 «Алгоритмические задачи в информационных технологиях» (03/04/2017 - 29/12/2017, руководитель проекта д.ф.-м.н. профессор Лыткина Д.В.);
- проект НИОКТР АААА-А18-118041990034-0 «О графах Кэли как возможных графах межмашинных связей» (02/04/2018 - 29/12/2018 руководитель проекта д.ф.-м.н. профессор Лыткина Д.В.);

а именно:

- копредставления симметрической и знакопеременной группы для различных наборов порождающих;
- алгоритм определения целой части спектра графа Кэли конечной группы;
- экспериментальные данные о целочисленных графах Кэли для групп небольших порядков.

Проректор  
По научной работе СибГУТИ



Е.Р. Трубехин